Übungen zum Ferienkurs Analysis II 2014

Probeklausur

Allgemein Hinweise:
Die Arbeitszeit beträgt **90 Minuten**. Falls nicht anders angegeben, sind alle Lösungen **ausführlich und nachvollziehbar** zu begründen. Schreiben Sie bitte **nicht mit Bleistift** und auch **nicht in roter oder grüner** Farbe. Zum Erreichen der Note 4,0 sind mindestens 50% der Punkte nötig.

1 Koordinatentransformation [7 Punkte]

Sei $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^- \times 0)$ und $\Phi : U \to V$ die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 - \xi_2^2 \\ 2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme $D\Phi(\xi)$, das normierte Zweibein $e_{\xi_1}(\xi), e_{\xi_2}(\xi)$ und $D\Phi^{-1}(\Phi(\xi))$.

(b) Sei $f \in \mathcal{C}\infty(U, \mathbb{R})$ und $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1} : V \to \mathbb{R}$. Drücke den Gradienten von $\tilde{f}$ durch Ableitungen von f in der Basis e_{ξ_1}, e_{ξ_2} aus.

Lösung

(a)

$$\mathrm{D}\Phi(\xi) = 2 \begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D}\Phi^{-1}(\Phi(\xi)) = \mathrm{D}\Phi(\xi)^{-1} = \frac{1}{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}$$

$$e_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$e_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

(b) Laut Vorlesung ist

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} \tilde{f} = D\Phi(\xi)^{T^{-1}} \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} \\ \partial_{\xi_2} \end{pmatrix} f = \frac{1}{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} \\ \partial_{\xi_2} \end{pmatrix} f$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} (e_{\xi_1}\partial_{\xi_1} + e_{\xi_2}\partial_{\xi_2}) f$$

2 Differenzierbarkeit [10 Punkte]

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

Man zeige

(a) f ist partiell differenzierbar

(b) f ist nicht stetig

(c) f ist nicht total differenzierbar

(d) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ im Punkt $(1, 0)$?

Lösung

(a) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen insbesondere auch partiell differenzierbar. Betrachte also den Fall $(x, y) = (0, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_x f(0,0) &= \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{f(h,0)}{h} \\ &= \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{0}{h} = 0\end{aligned}$$

und analog

$$\partial_y f(0,0) = 0.$$

f ist also auch in $(0, 0)$ partiell differenzierbar und damit ist f partiell differenzierbar. [3 Punkte]

(b) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wir können also nur die Unstetigkeit am Nullpunkt zeigen. Wir benutzen dafür Polarkoordinaten $(x, y) = (r \sin \phi, r \cos \phi)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} f(r, \phi) \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \sin\phi \cos\phi}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \sin\phi\cos\phi\end{aligned}$$

Es gibt ϕ für die der Grenzwert $\neq 0 = f(0, 0)$ ist $\Rightarrow$ f ist nicht stetig in $(0, 0)$. [3 Punkte]

(c) Da f in $(0, 0)$ nicht stetig ist, ist f dort auch nicht differenzierbar also f nicht differenzierbar. [1 Punkt]

(d) Außerhalb von $(0, 0)$ ist f differenzierbar. Wir berechnen zunächst den Gradienten für $(x, y) \neq 0$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich die Richtungsableitung einfach berechnen.

$$\begin{aligned}\partial_v f(1,0) &= \nabla f(1,0) \cdot v \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= v_2.\end{aligned}$$

[3 Punkte]

3 Taylor und Extrema [10 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(0,0) = 0$, f hat bei $(0,0)$ einen stationären Punkt und

$$H_f = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie, es existiert eine Umgebung U von $(0,0)$, sodass für alle $(x,y) \in U$ gilt $f(x,y) \geq x^2 + y^2$ (Tipp: Taylor-Entwicklung).

Lösung Mit den gegebenen Informationen schreiben wir die Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung hin

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 + (0,0)(x,y)^T + \tfrac{1}{2}\left(4x^2 + 4y^2 - xy - yx\right) + \theta(3) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(4x^2 + 4y^2 - 2xy\right) + \theta(3) \end{aligned}$$

Damit gilt $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wegen $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow -2xy \geq -x^2 - y^2$

$$f(x,y) \geq \tfrac{1}{2}(4x^2 + 4y^2 - x^2 - y^2) + \theta(3) = (x^2 + y^2)\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{\theta(3)}{x^2+y^2}\right)$$

4 Implizite Funktionen [12 Punkte]

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von $(0,0,0)$ gibt , in der das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x - y^2 + z^3) - \cos(x + y + z) + 1 &= 0 \\ \sin(y + x^2 - z^3) + \cos(x - y) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig nach (x,y) aufgelöst werden kann (d.h. $(x,y) = h(z)$ mit einer geeigneten Funktion h). Berechnen Sie weiterhin die Ableitung von h im Nullpunkt.

Lösung Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \begin{pmatrix} \sin(x - y^2 + z^3) - \cos(x + y + z) + 1 \\ \sin(y + x^2 - z^3) + \cos(x - y) - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt $f(0,0,0) = (0,0)$, der Punkt ist also eine Nullstelle. Nun berechnen wir das partielle Differential

$$\begin{aligned} D_{xy}f(0,0,0) &= \begin{pmatrix} \cos(x - y^2 + z^3) + \sin(x + y + z) & -2y\cos(x - y^2 + z^3) + \sin(x + y + z) \\ 2x\cos(y + x^2 - z^3) - \sin(x - y) & \cos(y + x^2 - z^3)\sin(x - y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Einheitsmatrix invertierbar, also können wir nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung an der Stelle $(0,0,0)$ entsprechend auflösen mit einer eindeutig bestimmten Funktion $h(z)$, die sogar differenzierbar ist. Die Ableitung berechnen wir ebenfalls nach dem Satz über implizite Funktionen

$$h'(0) = -[\mathrm{D}_{xy}f(0,h(0))]^{-1}\mathrm{D}_z f(0,h(0))$$

Das partielle Differential $\mathrm{D}_z f(x,y,z)$ lautet

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_z f(0,0,0) &= \begin{pmatrix} 3z^2\cos(x-y^2+z^3)+\sin(x+y+z) \\ -3z^2\cos(y+x^2-z^3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und damit erhalten wir für die Ableitung

$$\begin{aligned}h'(0) &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5 Extrema mit Nebenbedingungen [14 Punkte]

Berechnen Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

die von $(1,1,1)$ den kleinsten bzw. größten Abstand haben.

Lösung: Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y,z) = (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$
$Dg(x,y,z) = \nabla g(x,y,z) = 2(x,y,z) \neq (0,0,0)$,d.h. es genügt die kritischen Punkte der Lagrangeschen Hilfsfunktion zu bestimmen:

$$\nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zusammen mit der Nebenbedingung liefert dies das Gleichungssystem:

$$1 = (1-\lambda)x \tag{1}$$

$$1 = (1-\lambda)y \tag{2}$$

$$1 = (1-\lambda)z \tag{3}$$

$$1 = x^2+y^2+z^2 \tag{4}$$

Aus **??** bis **??** folgt $x = y = z = (1-\lambda)^{-1}$, in **??** eingesetzt ergibt dies $\frac{3}{(1-\lambda)^2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Da die Nebenbedingungsmenge kompakt und f stetig ist, existiert ein Minimum in

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

und ein Maximum in

$$p_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

denn

$$f(p_1) = (1-\sqrt{3})^2 < (1+\sqrt{3})^2 = f(p_2).$$

6 Parametrisierung auf Bogenlänge [4 Punkte]

Geben Sie explizit eine Parametrisierung auf Bogenlänge, $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, der Kettenlinie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t)(-t, -\cosh t)$.

Lösung

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2 t'} dt' = \int_0^t \cosh t' dt' = \sinh t.$$

[2Punkte]
Mit der Umkehrfunktion $\tilde{t}(s) = \operatorname{arsinh}(s) = \sinh^{-1}(s)$ [1Punkt] ist

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\tilde{t}(s)) = (-\operatorname{arsinh}(s), -\cosh(\operatorname{arsinh}(s))) &= (-\operatorname{arsinh}(s), -\sqrt{1 + \sinh(\operatorname{arsinh}(s))^2}) \\ &= (-\operatorname{arsinh}(s), -\sqrt{1 + s^2}).\end{aligned}$$

[1 Punkt]

7 Wegintegrale [7 Punkte]

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f(x) \mathrm{d}x$:

$$f(x, y, z) = (2z - \sqrt{x^2 + y^2}, z, z^2)$$

,

$$\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t), 0 \leq t, \leq 2\pi$$

Lösung

$$\int_\gamma f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} (2t - t, t, t^2) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} t\cos(t)dt + \int_0^{2\pi} t\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} t^2\cos(t)dt - \int_0^{2\pi} t^2\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} t^2 dt$$

mit partieller Integration $\Rightarrow$

$$\frac{8}{3}\pi^3 + 4\pi^2 + 2\pi$$

8 Trennbare Differentialgleichung [8 Punkte]

(a) Finden Sie auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen von $yy' = x(1 - y^2)$ mit $y(0) = y_0, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(b) Wie viele konstante Lösungen gibt es?

(c) Wie viele auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen mit $y(0) = 0$ gibt es?

Lösung

(a) Wir lösen durch Separation der Variablen. Für eine Lösung $y(x)$ mit $y(0) = y_0$ muss gelten

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ydy}{1-y^2} = \int_0^x x'dx', \text{ also } -\frac{1}{2}\ln|1-y(x)^2| + \frac{1}{2}\ln|1-y_0^2| = \frac{1}{2}x^2.$$

Da die Integration über die Singularitäten $y = \pm 1$ nicht möglich ist, müssen $1 - y_0^2$ und $1 - y(x)^2$ für alle x das gleiche Vorzeichen haben. Somit ergibt beidseitiges exponenzieren

$$1 - y(x)^2 = e^{-x^2}(1 - y_0^2).$$

Die rechte Seite ist immer kleiner als 1. Damit $y(x)$ stetig ist, muss also gelten:

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - e^{-x^2}(1 - y_0^2)}, & \text{falls } y_0 > 0, \\ -\sqrt{1 - e^{-x^2}(1 - y_0^2)}, & \text{falls } y_0 < 0 \end{cases}$$

denn der Radikant ist in beiden Fällen immer positiv.

(b) Die rechte Seite der Differentialgleichung ist Null für alle x, genau dann, wenn $y = \pm 1$ ist. Somit sind $y(x) = \pm 1$ genau zwei konstante Lösungen.

(c) Für $y_0 = 0$ sind $y_\pm(x) = \pm\sqrt{1 - e^{-x^2}}$ die einzigen zwei Lösungen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_0 y_\pm(x) = 0$. Für kleine x gilt $y_\pm(x) \approx \pm\sqrt{x^2} = \pm|x|$. Somit gibt es genau zwei Lösungen

$$y_1(x) = \begin{cases} y_+(x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ y_-(x) & \text{für } x < 0 \end{cases} \text{ und } y_2(x) = -y_1(x),$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und Lösungen der Differentialgleichung mit $y(0) = 0$ sind.