Übungen zum Ferienkurs Analysis II 2014

Kurven und Kurvenintegrale

4.1 Kreisumfang

Berechnen Sie den Umfang U des Kreises um (0,0) mit Radius r¿0. Betrachten Sie dazu das Kurvenintegral $4\int_k 1ds$, bei dem k der Viertelkreisbogen ist. Wählen Sie eine geeignete Parametrisierung und berechnen Sie das Integral.

Lösung

$r^2 = x^2 + y^2 \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad 0 \leq x \leq r \qquad \gamma = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{r^2 - x^2} \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} \end{pmatrix}$

$L = \int\limits_0^r ||\dot{\gamma(x)}||dx = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}}dx = \int\limits_0^r \sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}dx = \int\limits_0^r \sqrt{\frac{1}{1-\frac{x}{r}^2}}dx = r\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-y^2}}dy = r \arcsin(y)|_0^1 = r \cdot \frac{\pi}{2}$

$U = 4L = 2\pi r$

4.2 Kurvenintegral über Ellipse

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_k \sqrt{\frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2}}ds$$

über die Ellipse k

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wählen Sie für die Ellipse eine geeignete Parametrisierung.

Lösung:

$\gamma = \begin{pmatrix} a(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \qquad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin t \\ b \cdot \cos t \end{pmatrix}$

$\int\limits_0^{2\pi} f(x(t), y(t))||\dot{\gamma}||dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}dt$

$a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 tdt + b^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 tdt = \pi(a^2 + b^2)$

4.3 Kettenlinie

Ein ideales Seil wird über einen 2km breiten Abgrund gespannt und wird durch die Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(x) = (x, f(x))$ und $f(x) = \frac{1}{a}(\cosh(ax) - \cosh(a))$ mit $a > 0$ beschrieben (Einheit 1km).

a) Berechnen Sie die Länge des Seils in Abhängigkeit von a.

b) Berechnen Sie die Krümmung des Seils am Scheitel und an den Rändern.

c) Wie stark hängt das Seil in erster Näherung durch, wenn es 1mm, 10cm, bzw. 1m zu lang ist?

Lösung

a) $L(\gamma) = \int\limits_{-1}^1 ||\dot{\gamma(x)}||dx = \int\limits_{-1}^1 ||(1, \sinh(ax))||dx = \int\limits_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh^2(ax)}dx = \int\limits_{-1}^1 \cosh a(x)dx = \frac{2}{a}\sinh(a)$

b) $\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\ cosh(ax)}{(1+\sinh^2(ax))^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{\cosh^2(ax)} \qquad \kappa(0) = a$ und $\kappa(\pm 1) = \frac{a}{\cosh^2 a}$

c) $\Delta l = \frac{2}{a}\sinh(a) - 2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^4}{60} + ...$ $\qquad d = \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} + ...\right) \approx \frac{1}{2}\sqrt{3\Delta l} \approx 0.866\sqrt{\Delta l}$

   i) $\Delta l = 1mm = 10^{-6}km \qquad \Rightarrow d \approx 0.866m$

   ii) $\Delta l = 10cm = 10^{-4}km \qquad \Rightarrow d \approx 8.66m$

   iii) $\Delta l = 1m = 10^{-3}km \qquad \Rightarrow d \approx 27.386m$

4.4 Schraubenlinie

Die Kurve $\gamma(t) := (r\cos(t), r\sin(t =, ct)$ mit c,r ¿ 0 heißt Schaubenlinie.

a) Parametrisieren Sie γ nach der Bogenlänge. (Verwenden Sie $R^2 = c^2 + r^2$)

b) Berechnen Sie Tangentialeinheitsvektor, Normalenvektro und Krümmung der nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve.

Lösung:

a) $\gamma'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t), c) \qquad ||\gamma'(t)||_2^2 = r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t) + c^2 = r^2 + c^2 = R^2$
$l(\tau) := \int\limits_0^\tau ||\gamma_c'(t)||_2 dt = \int\limits_0^\tau R dt = R\tau$
Die gesuchte Parametertransformation ist als gegeben durch $t = \varphi(s) = l^{-1}(s) = \frac{s}{R}$
Die nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist also $\tilde{\gamma}(s) = (r\cos(\frac{s}{R}), r\sin(\frac{s}{R}), \frac{cs}{R})$

b) $\tau(s) = \tilde{\gamma}'(s) = (-\frac{r}{R}\sin(\frac{s}{R}), \frac{r}{R}\cos(\frac{s}{R}), \frac{c}{R}) \qquad \tau'(s) = (-\frac{r}{R^2}\cos(\frac{s}{R}), -\frac{r}{R^2}\sin(\frac{s}{R}), 0)$
$\kappa(s) = ||\tau'(s)||_2 = \sqrt{\frac{r^2}{R^4}[(\cos^2(\frac{s}{r}) + \sin^2(\frac{s}{r}]} = \frac{r}{R^2}$
$n(s) = \frac{\tau'(s)}{\kappa(s)} = (-\cos(\frac{s}{R}, -\sin(\frac{s}{R}), 0)$

4.5 Kurvenlänge

a) $\gamma(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ heißt Zykloide. Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma|_{[-\pi,\pi]}$.

b) Finden Sie die singulären Punkte der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t))$ und berechnen Sie ihre Bogenlänge.

Lösung:

a) $||\gamma'(t)|| = \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} = \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos(2\cdot\frac{t}{2})} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos^2(\frac{t}{2}) + \sin^2(\frac{t}{2})} = \sqrt{2}\sqrt{2sin^2(\frac{t}{2})} = 2|\sin(\frac{t}{2}|$
$L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} ||\gamma'(t)||dt = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin(\frac{t}{2})|dt = 4\int\limits_0^{\pi}\sin(\frac{t}{2})dt = 4(-2\cos(\frac{t}{2})|_{t=0}^{t=\pi} = 8$

b) γ ist stetig differenzierbar mit $\gamma'(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t))$. Also ist $\gamma'(t) = 0$ an jeder Stelle, für die $\cos(t) = 0$ oder $\sin(t) = 0$. Die Menge der singulären Punkte von γ ist demnach $\{0, \frac{1}{2\pi}, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\}$.
$||\gamma'(t)|| = \sqrt{9\cos^4(t)\sin^2(t) + 9\sin^4(t)\cos^2(t)} = 3\sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t))} = 3|\cos(t)\sin(t)| = \frac{3}{2}\sin(2t)|$
$L(\gamma) = \int\limits_0^{2\pi} ||\gamma'(t)||dt = \frac{3}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)dt - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(2t)dt + \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin(2t)dt - \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin(2t)dt\right) =$

$$= \frac{3}{2}\left(\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds - \int\limits_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds\right) =$$
$$= -\frac{3}{4}((-1-1)-(1+1)+(-1-1)-(1+1)) = 6$$

4.6 logarithmische Spirale

Als logarithmische Spirale bezeichnet man die Kurve $\gamma_c(t) := (e^{ct}\cos(t), e^{ct}\sin(t)),\ c > 0.$

a) Berechnen Sie die Länge L von γ_c auf $[0, 4\pi]$

b) Parametrisieren Sie $\gamma_c|_{[0,4\pi]}$ nach der Bogenlänge

Lösung:

a) $\gamma_c'(t) = \exp^{ct}(c\ \cos(t) - \sin(t), c\ \sin(t) + \cos(t))$
$||\gamma_c'(t)||_2^2 = \exp^{2ct}[c^2\cos^2(t) - 2c\ \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + c^2\sin^2(t) - 2c\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)] =$
$\exp^{2ct}[c^2 + 1]$
$L(\gamma_c) = \int\limits_0^{4\pi} \exp^{ct}\sqrt{1+c^2}dt = \sqrt{1+c^2}\frac{\exp^{4\pi} - \exp^0}{c} = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(\exp^{4\pi c} - 1)$

b) $l(\tau) :== \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(\exp^{\tau c} - 1) = s \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{1}{c}\ln\left(1 + \frac{sc}{1+c^2}\right) = t$