

## Kurven und Kurvenintegrale

### 4.1 Kreisumfang

Berechnen Sie den Umfang  $U$  des Kreises um  $(0,0)$  mit Radius  $r > 0$ . Betrachten Sie dazu das Kurvenintegral  $4 \int_k 1 ds$ , bei dem  $k$  der Viertelkreisbogen ist. Wählen Sie eine geeignete Parametrisierung und berechnen Sie das Integral.

### 4.2 Kurvenintegral über Ellipse

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_k \sqrt{\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2}} ds$$

über die Ellipse  $k$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wählen Sie für die Ellipse eine geeignete Parametrisierung.

### 4.3 Kettenlinie

Ein ideales Seil wird über einen 2km breiten Abgrund gespannt und wird durch die Kurve  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(x) = (x, f(x))$  und  $f(x) = \frac{1}{a}(\cosh(ax) - \cosh(a))$  mit  $a > 0$  beschrieben (Einheit 1km).

- Berechnen Sie die Länge des Seils in Abhängigkeit von  $a$ .
- Berechnen Sie die Krümmung des Seils am Scheitel und an den Rändern.
- Wie stark hängt das Seil in erster Näherung durch, wenn es 1mm, 10cm, bzw. 1m zu lang ist?

### 4.4 Schraubenlinie

Die Kurve  $\gamma(t) := (r \cos(t), r \sin(t), ct)$  mit  $c, r > 0$  heißt Schraubenlinie.

- Parametrisieren Sie  $\gamma$  nach der Bogenlänge. (Verwenden Sie  $R^2 = c^2 + r^2$ )
- Berechnen Sie Tangentialeinheitsvektor, Normalenvektor und Krümmung der nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve.

### 4.5 Kurvenlänge

- $\gamma(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$  heißt Zykloide. Berechnen Sie die Länge der Kurve  $\gamma|_{[-\pi, \pi]}$ .
- Finden Sie die singulären Punkte der Kurve  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) := (\cos^3(t) \sin(t), \sin^3(t))$  und berechnen Sie ihre Bogenlänge.

## 4.6 logarithmische Spirale

Als logarithmische Spirale bezeichnet man die Kurve  $\gamma_c(t) := (e^{ct}\cos(t), e^{ct}\sin(t))$ ,  $c > 0$ .

- a) Berechnen Sie die Länge  $L$  von  $\gamma_c$  auf  $[0, 4\pi]$
- b) Parametrisieren Sie  $\gamma_c|_{[0, 4\pi]}$  nach der Bogenlänge