Übungen zum Ferienkurs Analysis II 2014

Extrema mit/ohne Nebenbedingungen, Implizite Funktionen

3.1 kritische Punkte

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 2x^2 + y^4 + 2z^2 + 4yz$ und untersuchen Sie diese auf lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte.

Lösung:

Die Bedingung $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y^3 + 4z \\ 4z + 4y \end{pmatrix} = 0$ liefert die kritischen Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ $Hf(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ $Hf(0, \pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Hf(0,0,0) ist indefinit, da offenbar e_1 Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 4 > 0$ ist, aber die $det(Hf(0, 0, 0)) = -4^3 < 0$ und daher einer der beiden anderen Eigenwerte negativ sein muss (Explezite Rechnung ergibt $\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{20}$). Daher handelt es sich um einen Sattelpunkt.
An den beiden anderen Punkten ist die Hessematrix nach dem Kriterium über die Hauptabschnittsdeterminanten positiv definit. Also hat f an diesen beiden Punkten jeweils ein lokales Minimum.

3.2 Extrema

Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = cosx + y(y + 2)$. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von f.

Lösung

Zur Bestimmung der lokalen Extma suche die kritischen Punkte.

$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -sinx \\ 2y + 2 \end{pmatrix} = 0$ Das ergibt die kritischen Punkte $\begin{pmatrix} k\pi \\ -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}_0$ da xy < 0

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -cosx & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$Hf(k\pi, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ für k gerade und $Hf(k\pi, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ für k ungerade.

Für k gerade ist Hf indefinit. Daher handelt es sich bei dem Extremum um einen Sattelpunkt.
Für k ungerade ist Hf positiv definit. Es handelt sich folglich um ein lokales Minimum. $f(k\pi, -1) = -2$
Da $cosx \leq -1$ kann f bezüglich x nicht kleiner werden als in den lokalen Minima. Weiterhin gilt $y(y + 1) = y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1 \leq -1$. Somit sind die lokalen Minima auch globale Minima.
Da $f \to \inf$ für $y \to \infty$ gibt es kein globales Maximum.

3.3 Implizite Funktionen

a=(3,0,1) ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2 + y^2} = -8$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y = -8$$

a) Welche Aussage können Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen über die Auflösbarkeit des Gleichungssystems in einer Umgebung um a nach (y,z) und über die Ableitung der Funktion $x \mapsto (y(x), z(x))$

b) Überprüfen Sie die Auflösbarkeit nach (x,y) und nach (x,z) um a.

Lösung

a) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m \qquad f(\xi, \eta) = 0$
$I_f = \begin{pmatrix} D_\xi f & D_\eta f \end{pmatrix} \qquad D_\xi f \in \mathbb{R}^{n\times m} \qquad D_\eta f \in \mathbb{R}^m$
Wenn $D_\eta f$ invertierbar, dann gibt es ein $g(\xi)$ mit $f(\xi, g(\xi)) = 0$
Hier: $x \leftrightarrow \xi \qquad (y,z) \leftrightarrow \eta$
$f : \mathbb{R}^{1+2} \mapsto \mathbb{R}^2 \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-6\sqrt{x^2+y^2}+8 \\ x^2+y^2+z^2-6x-2y+8 \end{pmatrix} = 0$
Nach (y,z) auflösbar und $\exists$ ein $g : x \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$ mit f(x,g(x))=0?

$I_f(x,y,z) = (D_x f, D_{(y,z)} f) = \begin{pmatrix} 2x - \frac{6x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2y - \frac{6y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \\ 2x-6 & 2y-6 & 2z \end{pmatrix}$
$I_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D_{y,z}f(a)$ invertierbar da $det(D_{y,z}f(a) \neq 4$
$\Rightarrow \exists W \subset \mathbb{R}, x = 3 \in W \qquad \exists g : W \mapsto \mathbb{R}^2, g(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ stetig diffbar
$f(x, y(x), z(x)) = 0 \quad \forall x \in W$ und $g'(3) = -[D_{y,z}f(a,g(a))]^{-1} D_x f(a, g(a)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $D_{x,y}f(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ und $D_{x,z}f(a) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sind beide nicht invertierbar, weil det=0. Es ist keine Aussage über die Auflösbarkeit möglich.

3.4 Implizite Funktionen

Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $x + y + z = \sin(xyz)$ in einer Umgebung V von $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ eindeutig nach z auflösen lässt. D.h. in einer geeigneten Umgebung U von (0,0) existiert eine Funktion z=g(x,y) mit $f(x,y,z) = x+y+z-\sin(xyz) = 0$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von g an der Stelle (0,0).

Lösung

$f(x,y,z) = x+y+z-\sin(xyz) = 0$
$I_f = \begin{pmatrix} 1 - yz\cos(xyz) & 1 - xz\cos(xyz) & 1 - xy\cos(xyz) \end{pmatrix}$
$\partial_z(0,0,0) = 1 \neq 0$. Damit existiert in einer Umgebung von (0,0) eine Funtion g(x,y) mit f(x,y,g(x,y))=0.
Die Ableitung ergibt sich nach dem Satz über implizite Funktionen.
$D_{(x,y)}g(0,0) = -(D_z f(0,0,g(0,0))^{-1}\ D_{(x,y)} f(0,0,g(0,0)) = (-1,-1)$

3.5 Extrema mit Nebenbedingungen

Sie $f : S \to \mathbb{R} \quad f(x_1,x_2,x_3) := \sin(x_1) + \sin(x_2) + \sin(x_3)$ und $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x||_2^2 = \frac{1}{4}\pi^2\}$. Bestimmen Sie globale Maxima und Minima von f.

Lösung

Setze $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{1}{4}\pi^2$.

Dann ist $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} cos(x_1) \\ cos(x_2) \\ cos(x_3) \end{pmatrix}$ und $\nabla g(x) = 2x$.

Da S kompakt ist, nimmt f auf S Maximum und Minimum an und es gibt für jedes Minimum und Maximum (Minimum von -J) einen Lagrange-Multiplikator mit $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$

$$\begin{pmatrix}\cos(x_1)\\ \cos(x_2)\\ \cos(x_3)\end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 0 \quad \to \quad -2\lambda = \frac{\cos(x_1)}{x_1} = \frac{\cos(x_2)}{x_2} = \frac{\cos(x_3)}{x_3}$$

$x_1, x_2, x_3 \neq 0$ (Sonst $\cos(x_1) = 1 \neq \lambda \cdot 0$).

Fall 1: $\lambda = 0$

Dann sind $x_1, x_2, x_3 \in \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$. Dann ist aber $g(x) \neq 0$

Fall 2: $\lambda \neq 0$

Dann sind $x_1, x_2, x_3 \notin \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0\}$ Die Funktion $h(t) := \frac{\cos(t)}{t}$ ist auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus 0$ injektiv und φ ihre Umkehrfunktion, für die gilt $\varphi(-2\lambda) = x_1 = x_2 = x_3$. Setzt man dies in die Nebenbedingung ein ergibt das $\frac{1}{4}\pi^2 = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3\varphi(-2\lambda)^2 \quad \to \quad \varphi(-2\lambda) = \pm\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

Die Extrema sind also $\pm\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

Einsetzen in f ergibt, dass $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ das Maximum und $-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ das Minimum ist.

3.6 Extrema mit Nebenbedingungen

Sei $f : M \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(x, y, z) := xyz$, mit $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z^2 = 10\}$. Bestimmen Sie Kandidaten für Extrema von f.

Lösung: Sei $g(x, y, z) := x + y + 2z^2 - 10$ und $L = f + \lambda g$ Da $g \neq 0$ gibt es zu jedem Extremum von f auf M ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\nabla L = 0$ erfüllt ist.

$$\nabla L = \begin{pmatrix} yz + \lambda \\ xz + \lambda \\ xy + 4z\lambda \\ x + y + 2z^2 - 10 \end{pmatrix} = 0$$

Fall 1: $\lambda = 0$: $\quad\Rightarrow\quad yz = 0 \quad xz = 0 \quad xy = 0 \quad x + y + 2z^2 - 10 = 0$

- $x = 0,\ y = 0 \ \Rightarrow\ z = \pm\sqrt{5}$
- $y = 0,\ z = 0 \ \Rightarrow\ x = 10$
- $x = 0,\ z = 0 \ \Rightarrow\ y = 10$

Fall 2: $\lambda \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x = y = \frac{\lambda}{z}$ falls $z \neq 0$. Der Fall z=0 kann nur eintreten wenn $\lambda = 0$.

Einsetzen in ∇_z ergibt: $\frac{\lambda^2}{z^2} + 4z\lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2 + 4z^3\lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = -4z^3$

Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt: $\frac{2\lambda}{z} + 2z^2 - 10 = 8z^2 + 2z^2 - 10 = 0 \quad\Rightarrow\quad z = \pm 1$ Daraus lässt sich λ, x und y berechnen.

Demnach ergeben sich 6 Kandidaten für Extrema: $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \sqrt{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \sqrt{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 10\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\ 4\\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$