Übungen zum Ferienkurs Analysis II 2014

Topologie und Differentialgleichungen

2.1 Topologie

Finden Sie für jede der folgenden Aussagen einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) Sei $U \subset X$ offen. Dann ist auch $f(U)$ offen.

b) Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist auch $f(A)$ abgeschlossen.

c) Sei f bijektiv mit der Eigenschauft dass f(U) offen ist für jede offene Teilmenge $U \subset X$. Dann ist auch f^{-1} stetig.

Lösung

a) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel in $\mathbb{R}$ mit der Betragsmetrik ist gegeben durch $U = \mathbb{R}$, f(x)=sin(x), wo $f(U) = [-1, 1]$.

b) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel: $f = e^x$, $U =]-\infty, 0]$ ist abgeschlossen, aber $f(U) =]0, 1]$ ist weder offen, noch abgeschlossen.

c) Wahr. Nach Satz aus Vorlesung Analysis 1: f:X $\rightarrow$Y stetig genau dann wenn $f^{-1}(V)$ offen in X für V $\subset$ Y.

2.2 Eigenschaften von Mengen

Bestimmen Sie (ohne Beweis, welche der folgenen Mengen offen, abgeschlossen, zusammenhängend, kompakt sind.

- $\mathbb{R}^3$
- $[2, 13)$
- $[-1, 3) \cup (3, 7]$
- $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^{10} > 3\}$

Lösung

- $\mathbb{R}^3$ (offen, abgeschlossen, zusammenhängend)
- $[2, 13)$ (zusammenhängend)
- $[-1, 3) \cup [3, 7]$ (gar nichts)
- $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ (offen)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$ (abgeschlossen, da es sich um das Urbild der Menge $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x + y + z$ handelt und die Menge $|0|$ abgeschlossen ist; zusammenhängend; nicht kompakt, da unbeschränkt)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^{10} > 3\}$ (offen, zusammenhängend)

2.3 Oszillierende Platte

Eine in der x-z-Ebene unendlich ausgedehnte dünne (2D-)Platte bei y=0 befindet sich in einem inkompressiblen Fluid (Viskosität ν) oszilliert in x-Richtung mit der Geschwingkeit $Ucos(\omega t\ )$. Das Geschwindigkeitsfeld des Fluids lässt sich durch die Navier-Stokes-Gleichung beschreiben.

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad v = \begin{pmatrix} v_x(y,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die DGL gelöst wird durch

$$v(y,t) = U \exp^{-ky} \cos(ky - \omega t), \qquad k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

Hinweis: Verwenden Sie die no-slip Bedingung (Geschwindigkeit des Fluids an der Oberfläche der Platte ist gleich der Geschwindigkeit der Platte selbst) und v=0 für y $\to \infty$ und den Ansatz $v_x = Re(f(y) \exp^{i\omega t})$

Lösung
Setze Ansatz $v_x = Re(f(y) \exp^{i\omega t})$ in Navier Stokes Gleichung $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ ein.
$\to i\omega f(y) \exp^{i\omega t} = \nu f''(y) \exp^{i\omega t} \qquad (1)$
Ansatz für f: $f(y) = \exp^{ay}$, Setze f(y) in (1) ein.
$\to a = \pm\sqrt{\frac{\omega}{\nu}\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \pm k(1+i)$
$\to f(y) = A \exp^{ky(1+i)} + B \exp^{-ky(1+i)}$
Bestimme A,B: $f(y \to \infty) = 0 \to A = 0$
$v_x = Re\left(B \exp^{-ky(1+i)} e^{i\omega t}\right) = Re\left(B \exp^{-ky} \exp^{i(\omega t - ky)}\right) = B \exp^{-ky} \cos(\omega t - ky) = B \exp^{-ky} \cos(ky - \omega t)$
$v_x(y=0) = U \cos(\omega t) \to B = U$

2.4 RC-Glied

Ein periodisch angeregtes RC-Glied (R=Widerstand, C=Kondensator) lässt sich in dimensionsloser Form folgenderweise darstellen.

$$\dot{x} + x = A \sin(\omega t), \qquad \omega > 0$$

Lösen Sie die DGL als Summe aus allgemeiner Lösung der homogenen DGL und partikulärer Lösung der inhomogenen DGL.

Lösung

1) Lösung der homogenen DGL $\dot{x} + x = 0$: $\quad x(t) = c_1 e^{-t}$

2) Partikuläre Lösung des der inhomogenen DGL: $x(t) = c_2 \sin(\omega t) + c_3 cos(\omega t)$

3) Gesamtlösung: $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \sin(\omega t) + c_3 cos(\omega t)$.
   Bestimme die Koeffizienten: $x'(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 \omega \cos(\omega t) - c_3 \omega \sin(\omega t)$
   $x(t=0) = x_0 = c_1 + c_3$
   $\dot{x} + x = (c_3 + c_2\omega) \cos(\omega t) + (c_2 - c_3\omega) \sin(\omega t) = A \sin(\omega t)$
   Der Kosinusterm muss rausfallen. Also folgt:$(c_3 + c_2\omega) = 0$ und $(c_2 - c_3\omega) = A$
   Daraus folgt: $c_3 = -c_2\omega$ und $c_2 + c_2\omega^2 = A \Rightarrow c_2 = \frac{A}{1+\omega^2} \quad c_3 = \frac{-A\omega}{1+\omega^2} \quad c_1 = x_0 + \frac{A\omega}{1+\omega^2}$

2.5 Trennung der Variablen

Lösen Sie die folgenen DGLs durch Trennung der Variablen.

i) $y' = y^2 x$

ii) $(2x-1)y' = 2y \qquad y(0) = 3$

iii) $(x^2-1)y' = 2y \qquad y(0) = 5$

Lösung

i) $\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx \qquad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}^2 + c \qquad y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+c}$

ii) $y(x) = c(2(x-1) \qquad y(0) = 3 \qquad y(x) = 3 - 6x$

iii) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x^2-1} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$ Das Integral existiert nur für $x \neq \pm 1$
$ln|y| - ln|c| = ln|\frac{x-1}{x+1} \qquad y = c\frac{x-1}{x+1} \qquad y(0) = -c = 5 \quad \Rightarrow \quad c = -5$
$y = \begin{cases} x \neq \pm 1 & y = 5\frac{1-x}{x+1} \\ x = \pm 1 & y = 0 \end{cases}$

2.6 Lösung des Fundamentalsystems

Betrachten Sie die folgende homogene Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Betrachten Sie die Reihendarstellung von e^{At} und zeigen Sie, dass gilt:

$$\exp^{At} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \exp^{A0} = 1$$

*Hinweis:*Berechnen Sie die Potenzen A und finden Sie dabei Regelmäßigkeiten.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und lösen Sie damit die Differentialgleichung.

Lösung

a) $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, usw.

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^n = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$x_o = a_1 u_1 + a_2 u_2 \to a = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} x_{0,1} + x_{0,2} \\ x_{0,1} - x_{0,2} \end{pmatrix}$$

$$x = a_1 \exp^{\lambda_1 t} u_1 + a_2 \exp^{\lambda_2 t} u_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp^t + \exp^{-t} & \exp^t - \exp^{-t} \\ \exp^t - \exp^{-t} & \exp^t + \exp^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$$

Alternative:
$\exp^{At} = \exp^{TDT^{-1}} = T \exp^{tD} T^{-1}$ mit $T = (u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = T^{-1}$ und $D = \begin{pmatrix} \exp^t & 0 \\ 0 & \exp^{-t} \end{pmatrix}$
$\exp^{At} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp^t + \exp^{-t} & \exp^t - \exp^{-t} \\ \exp^t - \exp^{-t} & \exp^t + \exp^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$

2.7 Charakteristisches Polynom

Lösen Sie die DGL $3y'' + 2y' - y = 0$ mit den Randbedingungen y(1)=2 und y'(1)=0 mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

Lösung
Charakteristisches Polynom: $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \qquad \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{3}$
Lösung der DGL: $y(t) = a_1 e \exp^{-t} + a_2 \exp^{\frac{1}{3}t} \qquad y'(t) = -a_1 \exp^{-t} + \frac{1}{3} a_2 \exp^{\frac{1}{3}t}$
Bestimmung der Koeffizienten über Randbedingungen: $\rightarrow$ lineares Gleichungssystem
$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp^{-1} & \exp^{\frac{1}{3}} \\ -\exp^{-1} & \frac{1}{3}\exp^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
Löse Gleichungssystem mit Gaußschen Additionsverfahren:
$\left(\begin{array}{cc|c} \exp^{-1} & \exp^{\frac{1}{3}} & 2 \\ -\exp^{-1} & \frac{1}{3}\exp^{\frac{1}{3}} & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \exp^{-1} & 0 & 0.5 \\ 0 & \frac{1}{3}\exp^{\frac{4}{3}} & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5\exp \\ 1.5\exp^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$

2.8 Gradienten Systeme

a) Sei $dx/dt = f(x,y)$ und $dy/dt = g(x,y)$. Zeigen Sie, dass, falls es sich um ein Gradientensystem handelt mit $g(x,y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$ und $g(x,y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$, gilt: df/dy=dg/dx

b) Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Systemen um Gradientensysteme handelt? Konstruieren Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion U(x,y).

   i) $\dot{x} = y^2 + y\cos(x), \qquad \dot{y} = 2xy + \sin(x)$

   ii) $\dot{x} = 3x^2 - 1 - \exp^{2y}, \qquad \dot{y} = -2x\exp^{2y}$

Lösung

a) Falls es sich um ein Gradientensystem handelt gilt:

$$\dot{x} = f(x,y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \dot{y} = g(x,y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

b) i)

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + y\cos(x) = 2y + \cos(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + \sin(x) = 2y + \cos(x)$$

Es handelt sich also um ein Gradientensystem. Integriere partiell, um ein Potential zu finden.

$$\int (y^2 + y\cos(x))dx = y^2 x + y\sin(x) + c_1(y) = -U(x,y) \quad \text{mit} \quad c_1(x) = 0$$

$$\int (2xy + \sin(x))dy = y^2 x + y\sin(x) + c_2(x) = -U(x,y) \quad \text{mit} \quad c_2(y) = 0$$

ii) $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -2e^{2y}$

$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = -2e^{2y}$

Es handelt sich ebenfalls um ein Gradientensystem. Integriere wieder partiell.

$\int (3x^2 - 1 - \exp^{2y})dx = x^3 - x - x\exp^{2y} + c_1 y = -U(x,y) \quad \text{mit} \quad c_1(y) = 0$

$\int (-2x\exp^{2y})dy = -x\exp^{2y} + c_2(x) = -U(x,y) \quad \text{mit} \quad c_2(x) = x^3 - x$

2.9 Potenzreihenansatz

Die Gleichung $x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \quad y(0) = 1$ heißt Bessel-Differentialgleichung 0.Ordnung.
Lösen Sie diese mittels Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Lösung

$y'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ und $y''/x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}$

Einsetzen liefert: $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(k^2-k)a_k x^k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^k = a_1 x + \sum\limits_{k=2}^{\infty}(a_{k-2} + k^2 a_k)x^k = 0.$

Koeffizientenvergleich liefert: $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = 0$ und $a_k = -\frac{a_{k-2}}{k^2}$ für $k \geq 2$.

Damit folgt $a_{2n+1} = 0$ und $a_{2n} = -\frac{a2(n-1)}{4n^2} = \frac{(-1)^n}{4^n \cdot (n!)^2} \cdot a_0 = \frac{(-1)^n}{4^n \cdot (n!)^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Damit folgt: $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n \cdot (n!)^2} \cdot x^{2n}$

2.10 Banachscher Fixpunktsatz

Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N})}$: $\quad x_0 := 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{20}(4x_n + 4x_n^2 - 9)$

a) Zeigen Sie, dass $f : X \to X$, $f(x) = \frac{1}{20}(4x_n + 4x_n^2 - 9)$ auf dem metrischen Raum $(X,d) := ([-1,1], |\cdot|)$ eine Kontraktion darstellt.

b) Folgern Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Lösung

a) zu zeigen: f ist Kontraktion, d.h. Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstanten L¡1
Es gilt: $f'(x) = \frac{1}{20}(4+8x) \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{20}(4+8) = \frac{3}{5}\ \forall x \in [-1,1]$
Nach dem Schrankensatz gilt daher: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{5}|x-y|\ \forall x,y \in [-1,1]$
Das zeigt wegen $L = \frac{3}{5} < 1$ die Behauptung.

b) f ist Kontraktion und (X,d) ist vollständig.
$\Rightarrow$ f besitzt auf [-1,1] genau einen Fixpunkt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dagegen.
$f(x) = x \quad \leftrightarrow \quad 4x^2 - 16x - 9 = 0$ Lösung der quadratischen Gleichung: $x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$
x_2 ist Fixpunkt von f in [-1,1] mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{2}$
Bemerkung: Man sieht, dass f keine Kontraktion auf ganz $\mathbb{R}$ sein kann, sonst gäbe es nur genau einen Fixpunkt.