Übungen zum Ferienkurs Analysis II 2014

Topologie und Differentialgleichungen

2.1 Topologie

Finden Sie für jede der folgenden Aussagen einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) Sei $U \subset X$ offen. Dann ist auch $f(U)$ offen.

b) Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist auch $f(A)$ abgeschlossen.

c) Sei f bijektiv mit der Eigenschauft dass f(U) offen ist für jede offene Teilmenge $U \subset X$. Dann ist auch f^{-1} stetig.

2.2 Eigenschaften von Mengen

Bestimmen Sie (ohne Beweis, welche der folgenen Mengen offen, abgeschlossen, zusammenhängend, kompakt sind.

- $\mathbb{R}^3$
- $[2, 13)$
- $[-1, 3) \cup (3, 7]$
- $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^{10} > 3\}$

2.3 Oszillierende Platte

Eine in der x-z-Ebene unendlich ausgedehnte dünne (2D-)Platte bei y=0 befindet sich in einem inkompressiblen Fluid (Viskosität ν) oszilliert in x-Richtung mit der Geschwingkeit $U cos(\omega t\ )$. Das Geschwindigkeitsfeld des Fluids lässt sich durch die Navier-Stokes-Gleichung beschreiben.

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad v = \begin{pmatrix} v_x(y,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die DGL gelöst wird durch

$$v(y,t) = U \exp^{-ky} \cos(ky - \omega t), \qquad k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

Hinweis: Verwenden Sie die no-slip Bedingung (Geschwindigkeit des Fluids an der Oberfläche der Platte ist gleich der Geschwindigkeit der Platte selbst) und v=0 für y $\to \infty$ und den Ansatz $v_x = Re(f(y) \exp^{i\omega t})$

2.4 RC-Glied

Ein periodisch angeregtes RC-Glied (R=Widerstand, C=Kondensator) lässt sich in dimensionsloser Form folgenderweise darstellen.

$$\dot{x} + x = A \sin(\omega t), \qquad \omega > 0$$

Lösen Sie die DGL als Summe aus allgemeiner Lösung der homogenen DGL und partikulärer Lösung der inhomogenen DGL.

2.5 Lösung des Fundamentalsystems

Betrachten Sie die folgende homogene Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Betrachten Sie die Reihendarstellung von e^{At} und zeigen Sie, dass gilt:

$$\exp^{At} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \exp^{A0} = 1$$

*Hinweis:*Berechnen Sie die Potenzen A und finden Sie dabei Regelmäßigkeiten.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und lösen Sie damit die Differentialgleichung.

2.6 Charakteristisches Polynom

Lösen Sie die DGL $3y'' + 2y' - y = 0$ mit den Randbedingungen y(1)=2 und y'(1)=0 mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

2.7 Gradienten Systeme

a) Sei $dx/dt = f(x, y)$ und $dy/dt = g(x, y)$. Zeigen Sie, dass, falls es sich um ein Gradientensystem handelt mit $g(x, y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$ und $g(x, y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$, gilt: df/dy=dg/dx

b) Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Systemen um Gradientensysteme handelt? Konstruieren Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion U(x,y).

   i) $\dot{x} = y^2 + y\cos(x), \qquad \dot{y} = 2xy + \sin(x)$

   ii) $\dot{x} = 3x^2 - 1 - \exp^{2y}, \qquad \dot{y} = -2x\exp^{2y}$

2.8 Potenzreihenansatz

Die Gleichung $x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \quad y(0) = 1$ heißt Bessel-Differentiallgleichung 0.Ordnung.
Lösen Sie diese mittels Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

2.9 Banachscher Fixpunktsatz

Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\quad x_0 := 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{20}(4x_n + 4x_n^2 - 9)$

a) Zeigen Sie, dass $f : X \to X$, $f(x) = \frac{1}{20}(4x_n + 4x_n^2 - 9)$ auf dem metrischen Raum $(X, d) := ([-1, 1], |\cdot|)$ eine Kontraktion darstellt.

b) Folgern Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.