Übungen zum Ferienkurs Analysis II 2014

Differenzieren und Taylorreihen

1.1 Differenzieren

a) Zeigen Sie dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto x \cdot ||x||$ bei $0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und dass Df(0)=0 gilt.

b) Zeigen Sie, dass für $a,\ b \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^n,\ X \mapsto X \cdot a + b$ an jeder Stelle $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ differenzierbar ist.

Lösung

a) Um Differenzierbarkeit bei 0 nachzuweisen gilt es zu zeigen, dass es ein lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{||f(h) - f(0) - L(h)||}{||h||} = 0 \tag{1}$$

Setzt man hier L(H):=0, so folgt.

$$\lim_{h\to 0} \frac{||f(h) - f(0) - L \cdot h||}{||h||} = \lim_{h\to 0} \frac{||f(h)||}{||h||} = \lim_{h\to 0} \frac{||h \cdot ||h||\,||}{||h||} = \lim_{h\to 0} ||h|| = 0$$

Also ist (1) erfüllt. Aus der Eindeutigkeit von obigem L folgt dann Df(0)=0.

b) Wir berechnen $f(X + H) - f(X) = (X + H) \cdot a + b - (X \cdot a + b) = H \cdot a$
Setzt man in (1) $L(H) = H \cdot a$, so folgt

$$\lim_{H\to 0} \frac{||f(X + H) - f(X) - L\,H||}{||H||} = \lim_{H\to 0} 0 = 0 \tag{2}$$

und damit die Differenzierbarkeit.

1.2 Differenzierbarkeit

Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x_1)\sin(x_2)}{x_1^2+x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit.

Lösung:

i) Betrachte eine Folge mit $x = x_1 = x_2$ und $x \to 0$.

$$\lim_{(x_1,x_2)\to 0} \frac{\sin(x_1)\sin(x_2)}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \neq 0 \tag{3}$$

Somit ist f bei 0 nicht stetig.

ii) $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{sin(t)sin(0)}{t^2+0^2} - 0\right) = 0$
Ableitung in x_2 Richtung analog.

iii) Da f bei 0 nicht stetig ist, kann es nicht differenzierbar sein.

1.3 Taylorpolynom

Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \exp(x-y)$ an der Stelle (0,0).

Lösung:

$\nabla f(x,y) = e^{x-y}(1,-1)^T \qquad Hf(x,y) = e^{x-y}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Das 2.Taylorpolynom von f an der Stelle (0,0) ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} T_2((x,y);(0,0)) &= f(0,0) + \nabla f(0,0)^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}(x,y)\cdot Hf(0,0)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + x - y + \tfrac{1}{2}(x,y)\cdot \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \end{pmatrix} = 1 + (x-y) + \tfrac{1}{2}(x-y)^2 \end{aligned}$$

Alternative Lösung: Reihenentwicklung $\quad f(x,y) \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(x-y)^k}{k!}$

1.4 Taylorreihe

Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \cos x + y(y+2)$ und sei (x_0, y_0) einer der kritischen Punkte. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt $(\pi, -1)$

Lösung

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -sinx \\ 2y+2 \end{pmatrix} \qquad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -cosx & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} T(f,(x_0) &= f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x-x_0) + \tfrac{1}{2}(x-x_0)^T Hf(x_0)(x-x_0) = \\ &= -2 + 0 + \tfrac{1}{2}(x-\pi, y+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\pi \\ y+1 \end{pmatrix} = -2 + \tfrac{1}{2}((x-\pi)^2 + 2(y+1)^2) \end{aligned}$$

1.5 Taylorpolynom

Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion

$$f :]-1,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{1+x^3}$$

zum Entwicklungspunkt 0.

Lösung:

FÜr $x \in]-1;1[$ gilt (Geometrische Reihe)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = 1 - x^3 + x^6 - x^9 \pm ... \tag{4}$$

Dies ist insbesondere die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt 0. Das gesuchte Taylorpolynom dritter Ordnung lautet demnach $T_3(x,f) = 1 - x^3$.

1.6 Existenz einer Funktion

Gibt es eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, sodass $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(xy) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt?

Lösung
Nein, denn nach dem Satz von Schwarz müsste für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y \cdot \cos(xy) = x \cdot \cos(xy) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{5}$$

Dies ist aber für x=1 und y=0 falsch.