Ferienkurs Experimentalphysik 1

Wintersemester 2013/2014

Thomas Maier

Lösung : Probeklausur

Lösung 1: Fliegender Pfeil

Es gelten die Bewegungsgleichungen

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t$$
$$y(t) = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Reichweite: Der Pfeil treffe zur Zeit t_1 auf dem Boden auf. Dann gilt

$$y(t_1) = 0$$
$$\Rightarrow \left(v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_1\right) t_1 = 0$$
$$\Rightarrow t_1 = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Setzt man dies nun in $x(t)$ ein erhält man die Reichweite

$$x(t_1) = \frac{2 v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} =: x_{max}(\alpha)$$

und damit $x_{max}(40°) = 246,4\ m$

Höhe: Der Pfeil sei zur Zeit t_2 am höchsten Punkt. Dann gilt

$$\dot{y}(t_2) = 0$$
$$\Rightarrow v_0 \sin(\alpha) - g t_2 = 0$$
$$\Rightarrow t_2 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Setzt man dies nun in $y(t)$ ein erhält man die Höhe

$$y(t_2) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} =: y_{max}(\alpha)$$

und damit $y_{max}(40°) = 51,6\ m$

Lösung 2: Skilift

a) Damit man nach dem Einhängen mit einer konstanten Geschwindigkeit nach oben gezogen wird, darf resultierend keine Kraft wirken. Es wirken einerseits die Kraft des Skilifts F_L Richtung Bergspitze, die Reibungskraft F_R und die zur Piste parallele Komponente der Gravitationskraft F_G Richtung Tal. Man erhält also

$$\begin{aligned} F_L &= F_R + F_G \\ &= \mu F_N + mg \sin\alpha \\ &= \mu mg \cos\alpha + mg \sin\alpha \\ &= mg(\mu \cos\alpha + \sin\alpha) = 590\ N \end{aligned}$$

b) Der Lift wendet entlang einer Strecke Δs die Kraft F_L auf und verrichtet damit die Arbeit $\Delta W = F_L \cdot \Delta s$. Es ergibt sich also für seine Leistung

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F_L \cdot \Delta s}{\Delta t} = F_L \cdot v = 1639\ W$$

Lösung 3: Kinder auf Karussell

a) Das Gesamtträgheitsmoment I_0 lässt sich mit dem Satz von Steiner berechnen

$$I_0 = I_S + 2mr^2$$

b) Der Abstand der Kinder von der Drehachse wird jetzt eine Funktion der Zeit

$$r \ \rightsquigarrow \ r(t) = r - v_0 t$$

Damit wird auch das Trägheitsmoment des Systems eine Funktion der Zeit

$$\begin{aligned} I_0 \ \rightsquigarrow \ I(t) &= I_S + 2mr(t)^2 \\ &= I_S + 2m(r - v_0 t)^2 \end{aligned}$$

Da keine äußeren Kräfte wirken ist der Gesamtdrehimpuls L_{ges} erhalten

$$L_{ges} = \text{const.} = I_0 w_0 = I(t) w(t)$$

Damit ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Zeit

$$w(t) = \frac{I_0}{I(t)} w_0 = \frac{I_S + 2mr^2}{I_S + 2m(r - v_0 t)^2} w_0$$

c) Für den Fall das beide Kinder am Mittelpunkt sitzen tragen sie nicht zum Trägheitsmoment bei, also gilt $I_1 = I_S$. Damit ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit

$$w_1 = \frac{I_S + 2mr^2}{I_S} w_0 = \left(1 + \frac{2mr^2}{I_S}\right) w_0 = \left(1 + 4\frac{m}{M}\right) w_0$$

und mit einem Massenverhältnis von $\frac{m}{M} = \frac{1}{8}$ ergibt sich schließlich

$$w_1 = (1 + 0,5) w_0$$

Die Scheibe dreht sich also um 50% schneller.

Lösung 4: Inelastischer Stoß

a) Bei einem inelastischen Stoß gilt Impulserhaltung

$$\begin{aligned} p &= p' \\ m_1 v_1 &= (m_1 + m_2) v' \\ \Rightarrow v' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}$$

Diese Geschwindigkeit entspricht gleichzeitig der Schwerpunktsgeschwindigkeit, da auch diese bei ohne Einwirkung äußerer Kräfte erhalten ist. Für die kinetische Energie nach dem Stoß gilt

$$E' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2$$

Die in Verformung umgewandelte Energie ist somit

$$Q = E - E' = \frac{1}{2}\left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\right) v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2$$

b) Die Geschwindigkeit eines Körpers i im Schwerpunktsystem lässt sich berechnen aus $v_{i,S} = v_i - v_S$, wobei v_S die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist. Die anfängliche Gesamtenergie im Schwerpunktsystem ist also

$$\begin{aligned} E_S &= \frac{1}{2} m_1 \left(v_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{1}{2} m_2 v_1^2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 \end{aligned}$$

Lösung 5: Katapult

Mit dem Hookeschen Gesetz erhält man die übliche Federkraft

$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= \sigma = E\epsilon = E\frac{\Delta l}{l} \\ \Rightarrow F &= \frac{EA}{l}\Delta l =: k\ x \end{aligned}$$

mit der Federkonstanten k. Nun lässt sich die Energieerhaltung anwenden

$$\begin{aligned} E_{kin} &= E_{span} \\ \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}(\Delta l)^2 = \frac{1}{2} E V \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2} E V \epsilon^2 \end{aligned}$$

Somit erhält man für das Volumen V an benötigtem Haar mit $E = 5 \cdot 10^8\ N/m^2$, $\epsilon = 10\%$, $m = 50\ kg$ und $v = 20\ m/s$

$$V = \frac{m v^2}{E \epsilon^2} = 4 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

Lösung 6: Das Prinzip des Archimedes

Sei ρ_H die Dichte des Holzes und ρ_O die Dichte des Öls. V ist das Volumen des Holzes. Im Wasser ergibt sich aus der Auftriebskraft für das Holz:

$$\rho \cdot \frac{2}{3}V = \rho_H V \;\Rightarrow\; \rho_H = \frac{2}{3}\rho \approx 0.67\ g/cm^3$$

Analog kann dann die Dichte des Öls berechnet werden:

$$\rho_O \cdot \frac{9}{10}V = \rho_H V \;\Rightarrow\; \rho_O = \frac{10}{9}\rho_H \approx 0.74\ g/cm^3$$

Lösung 7: Verschiedene Pendel

a) Die Bewegungsgleichung für das Fadenpendel erhält man aus dem Kraftansatz $F_R = -\sin\varphi F_G$. Sie lautet

$$\begin{aligned} ML\ddot{\varphi} &= -Mg\sin\varphi \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{L}\sin\varphi \end{aligned}$$

b) Mit der Kleinwinkelnäherung erhältl man die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\varphi$$

Mit dem Ansatz $\varphi(t) = A\sin(wt)$ ergibt sich $\ddot{\varphi} = -Aw^2\sin(wt)$. Man erhält durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

c) Das Trägheitsmoment bezüglich der Rotation um das Ende des Stabes erhält man mit dem Satz von Steiner

$$I = I_{Stab} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Die Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels ergibt sich aus dem Drehmomentansatz $M = I\ddot{\varphi}$. Das Drehmoment ergibt sich aus der Gravitationskraft, die am Schwerpunkt im Abstand $\frac{L}{2}$ von der Rotationsachse angreift. Mit der Kleinwinkelnäherung erhält man also

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} &= -Mg\frac{L}{2}\varphi \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{MgL}{2I}\varphi = -\frac{3g}{2L}\varphi \end{aligned}$$

Man erhält für die Kreisfrequenz und die Schingungsdauer

$$w = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \qquad T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

d) Das Trägheitsmoment bezüglich der Rotation um den Rand des Rings erhält man mit dem Satz von Steiner

$$I = I_{Ring} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ML^2$$

Äquivalent zu c) erhält man für die Kreisfrequenz und die Schingungsdauer

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$