Ferienkurs Experimentalphysik 1

Wintersemester 2013/2014

Thomas Maier

Lösung 4: Schwingungen und Wellen

Allgemeine Lösung von homogenen DGLs zweiter Ordnung

Wir wollen die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

allgemein lösen. Man kann zeigen, dass diese Differentialgleichung exakt zwei linear unabhängige Lösungen besitzt, die man schließlich in einer Linearkombination zusammenfassen kann.

Als Ansatz wählen wir

$$y(x) := c\ e^{\lambda x}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, kann man nach dem Ableiten die Funktion kürzen. Man erhält das sogenannte *Charakteristische Polynom*

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

dessen Lösungen für λ wir sehr einfach mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen bestimmen können.

$$\lambda_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

Wie erwähnt muss unsere Gleichung exakt zwei Lösungen besitzen. Das ist auch der Fall, da wir zwei verschiedene λ erhalten, solange der Wurzelausdruck nicht Null ist. Falls dem aber so ist, also gilt die Beziehung $a_1^2 = 4a_2a_0$, fällt der hintere Term weg und wir erhalten nur eine Lösung. Hier handelt es sich um einen Spezialfall.

Wir betrachten nun die drei verschiedene Fälle:

- 1. Fall: $\lambda_{1/2} \in \mathbb{R}$ (physikalisch: Kriechfall) Hier sind beide Lösungen reell, die Linearkombination der Lösungen lautet also:

$$y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$$

- 2. Fall: $\lambda_{1/2} \in \mathbb{C}$ (physikalisch: Schwingfall) Hier besitzen beide Lösungen einen Realteil und Imaginärteil $\lambda_{1/2} = a \pm ib$:

$$y(x) = e^{ax}(c_1e^{ibx} + c_2e^{-ibx})$$

- 3. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ (physikalisch: Aperiodischer Grenzfall) Wir erhalten nur eine Lösung, benötigen allerdings eine Zweite. Die passende Lösung lautet:

$$y(x) = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}$$

Lösung 1: Ungedämpfter harmonischer Oszillator

Beim ungedämpften harmonischen Oszillator handelt es sich um eine Anwendung der homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

a) Die Differentialgleichung ist gegen als

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

b) Setzt man nun wie oben beschrieben den Ansatz $x(t) := c\ e^{\lambda t}$ in diese Differentialgleichung ein erhält man

$$\begin{aligned} &m\ \lambda^2\ c\ e^{\lambda t} = -k\ c\ e^{\lambda t} \\ &\Rightarrow\ \lambda^2 = -\frac{k}{m} \\ &\Rightarrow\ \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} =: \pm i w_0 \end{aligned}$$

wobei i die Imaginäre Einheit ist und wir eine neue Variable definieren.

$$w_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

c) Unser Ansatz löst also bei passendem λ die Differentialgleichung. Es gibt sogar zwei verschiedene Lösungen, da wir zwei verschiedene λ erhalten. Wir wissen aus der Linearen Algebra, dass die Linearkombination zweier Lösungen wieder eine Lösung ist. So erhalten wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = Ae^{iw_0t} + Be^{-iw_0t}$$

mit beliebigen (auch komplexen) Vorfaktoren A und B. Mithilfe der Eulerformel $e^{iw_0t} = \cos(w_0t) + i\sin(w_0t)$ lässt sich diese Gleichung auch umschreiben in

$$x(t) = c_1\cos(w_0t) + c_2\sin(w_0t)$$

Auch die hier auftretenden Vorfaktoren c_1 und c_2 sind beliebig und können komplex sein, sind aber von A und B verschieden.

d) Um unser System genauer zu beschreiben und eine eindeutige Lösung zu erhalten benötigen wir Nebenbedingungen. Unsere Nebenbedingungen bedeuten mathematisch

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 \end{aligned}$$

Setzt man nun diese Bedingungen in die allgemeine Lösung ein, erhält man

$$\begin{aligned} x(t=0) &= c_1\underbrace{\cos(0)}_{=1} + c_2\underbrace{\sin(0)}_{=0} = x_0 &\Rightarrow\quad c_1 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= -c_1 w\underbrace{\sin(0)}_{=0} + c_2 w\underbrace{\cos(0)}_{=1} = v_0 &\Rightarrow\quad c_2 = \frac{v_0}{w_0} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die spezielle Lösung

$$x(t) = x_0\cos(w_0t) + \frac{v_0}{w_0}\sin(w_0t)$$

Lösung 2: Gedämpfter harmonischer Oszillator

Eine weitere Anwendung der homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist der gedämpfte, harmonische Oszillator.

a) Die Gleichung des gedämpften Oszillators ist gegeben als

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$$

b) Zum Lösen verwenden wir den bekannten Ansatz $x(t) = c\, e^{\lambda t}$ und erhalten als allgemeine Lösung wie im vorherigen Kapitel beschrieben

$$x(t) = e^{-\delta t}(c_1 \cos(w_d t) + c_2 \sin(w_d t))$$

c) Wobei für die Variablen gilt

$$\delta := \frac{d}{2m} \qquad w_d := \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2} = \sqrt{w_0^2 - \delta^2}$$

Wir erkennen, für den Fall $d = 0$ entspricht das genau dem Ergebnis des ungedämpften harmonischen Oszillators. Die neue Eigenfrequenz w_d wird Dämpfungseigenfrequenz und die Konstante δ wird meist auch Dämpfungskoeffizient bezeichnet.

Lösung 3: Feder auf schiefer Ebene

a) Wählen wir die positive x-Richtung so, dass sie die schiefe Ebene herab zeigt, so ergibt sich bei einer Auslenkung der Feder um x aus der Ruhelage x_0 für die resultierende Kraft $F = F_{Hang} - F_{Feder}$, also

$$m\ddot{x} = mg \sin\alpha - kx$$
$$\Rightarrow \ddot{x} + w^2 x = g \sin\alpha$$

wobei $w = \sqrt{k/m}$. Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung! Die Lösung der homogenen DGL ist die bekannte Schwingungsfunktion

$$x_{hom}(t) = A \sin(wt) + B \cos(wt)$$

Da die Inhomogenität nur eine Konstante ist, wählen wir als partikulären Ansatz ebenfalls eine konstante Funktion $x_{part}(t) = C$. Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$x_{part}(t) = \frac{g \sin\alpha}{w^2} = x_0$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{hom}(t) + x_{part}(t) \\ &= A \sin(wt) + B \cos(wt) + \frac{g \sin\alpha}{w^2} \end{aligned}$$

Mit den Nebenbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ erhält man für die Koeffizienten

$$A = \frac{v_0}{w} \qquad B = 0$$

und somit die spezielle Lösung

$$x(t) = \frac{v_0}{w} \sin(wt) + x_0$$

b) Es gilt

$$w^2 = (2\pi f)^2 = D/m$$
$$\Rightarrow D = m(2\pi f)^2 = 4 \ kN/m$$

c) Die Eigenfrequenz w hängt nicht vom Winkel α ab. Die Ruhelage x_0 allerdings schon.

Lösung 4: Palme im Wind

a) Die Palme wird durch eine Kraft von $F = 1000 \ N$ um $x = 4 \ m$ ausgelenkt. Damit ergibt sich eine Federkonstante k der Palme von

$$k = \frac{F}{x} = 250 \ N/m$$

Für die Kreisfrequenz w_0 der ungedämpften Schwingung gilt

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,5 \ Hz$$

Mit der Definition des logarithmischen Dekrements findet man einen Zusammenhang zwischen der Dämpfungskoeffizient δ, der Periodendauer T und den angegeben Maximalamplituden. Es ergibt sich

$$\delta T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln \frac{4}{3}$$

Aus der Vorlesung ist für den Fall der gedämpften Schwingung die Dämpfungseigenfrequenz bekannt.

$$w_d^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right) = w_0^2 - \delta^2$$

Für die Periodendauer gilt somit

$$T = \sqrt{\frac{(2\pi)^2 + (\delta T)^2}{w_0^2}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^2 + (\ln 4/3)^2}{w_0^2}} = 12,6 \ s$$

Für die Dämpfungskoeffizient erhält man damit

$$\delta = \frac{\ln 4/3}{T} = 0,023 \ s^{-1}$$

b) Für die Kreisfrequenz folgt dann

$$w_d = \frac{2\pi}{T} = 0,499 \ Hz$$

Lösung 5: Resonanter Antrieb

a) Zweimaliges Differenzieren liefert

$$\dot{x}_p(t) = \frac{f_0}{2\Omega}\sin(\Omega t) + \frac{f_0}{2} t\cos(\Omega t)$$
$$\ddot{x}_p(t) = f_0\cos(\Omega t) - \frac{f_0\Omega}{2} t\sin(\Omega t)$$

Eingesetzt in die Schwingungsgleichung erhält man

$$\ddot{x}_p(t) + \Omega^2 x_p(t) = f_0\cos(\Omega t) - \frac{f_0\Omega}{2} t\sin(\Omega t) + \Omega^2\frac{f_0}{2\Omega} t\sin(\Omega t) = f_0\cos(\Omega t)$$

$x_p(t)$ löst also die Schwingungsgleichung.

b) Die Oszillatorenergie lässt sich schreiben als

$$E(t) = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + wx^2)$$
$$= \frac{mf_0^2}{8\Omega^2}\left(\sin^2(\Omega t) + 2\Omega t\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) + \Omega^2 t^2\right)$$

Es ist also ein quadratisches Anwachsen überlagert mit oszillierenden Anteilen. Mittelt man die oszillierenden Anteile über eine Periode T, so erhält man

$$\int_0^T dt\ 2t\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) = \int_0^T dt\ t\sin(2\Omega t) = -\frac{T}{2\Omega}$$
$$\int_0^T dt\ \sin^2(\Omega t) = \frac{T}{2}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T dt E(t) = \frac{1}{T}\frac{mf_0^2}{8\Omega^2}\left(\frac{T}{2} - \Omega\frac{T}{2\Omega} + \Omega^2 t^2\right) = \frac{mf_0^2}{8T} t^2$$

Bemerkung: in der oben Formel wurden nur die oszillierenden Anteile über eine Periode gemittelt.

c) Die Lösung der homogenen DGL lautet bekanntlich $x_{hom}(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$. Mit der angegeben partikulären Lösung lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) + \frac{f_0}{2\Omega} t\sin(\Omega t)$$

Aus den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ folgt $A = 0$ und $B = v_0/\Omega$. Man erhält letztendlich die spezielle Lösung

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{\Omega} + \frac{f_0}{2\Omega} t\right)\sin(\Omega t)$$

Lösung 6: Seilwelle

a) Die Welle bewegt sich nach links, da das Argument der Kosinus-Funktion

$$kx + wt = k\left(x + \frac{w}{k}t\right)$$

nach links wandert: Zur Zeit $t = 0$ ist sein Nullpunkt bei $x = 0$, zur Zeit $t > 0$ ist er bei $x = -w/k \cdot t < 0$. Aus dieser Gleichung erhält man die Geschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{w}{k} = 5\ m/s$$

b) Für Wellenlänge λ, Frequenz f und Schwinungsdauer T erhält man

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0,1\ m \qquad f = \frac{w}{2\pi} = 50\ Hz \qquad T = \frac{1}{f} = 0,02\ s$$

c) Wir setzen uns an einen festen Punkt, d.h. halten x konstant, und leiten nach t ab

$$\dot{y}(x,t) = -Aw \sin(kx + wt)$$

Die Amplitude der Geschwindigkeit des Seilelements am festgehaltenen Ort x ist also Aw (unabhängig von x) und hat den Wert $Aw = 0,314\ m/s$

d) Aus der Phasengeschwindigkeit der Welle

$$v_{ph} = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{m/l}} \tag{1}$$

erhält man die Seilspannung

$$F = \frac{w^2}{k^2}\frac{m}{l} = 10\ N$$

Lösung 7: Überlagerung zweier Schallewellen

Für die Überlagerung erhält man

$$\begin{aligned}\Psi(z,t) = \Psi_1 + \Psi_2 &= 2A\cos\left(\frac{\Delta w}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)\cos(\bar{w}t - \bar{k}z) \\ &= 2A\ \cos(85s^{-1}t - 0,25m^{-1}z)\ \cos(715s^{-1}t - 1,75m^{-1}z)\end{aligned}$$

Die Phasengeschwindigkeiten der Einzelwellen sind

$$v_{ph1} = \frac{w_1}{k_1} = 400\ m/s \qquad v_{ph2} = \frac{w_2}{k_2} = 420\ m/s$$

Die Gruppengeschwindigkeit beträgt

$$v_{gr} = \frac{\Delta w}{\Delta k} = 340\ m/s$$