Ferienkurs Experimentalphysik 1

Wintersemester 2013/2014

Thomas Maier

Lösung 3: Deformierbare Körper und Flüssigkeiten

Lösung 1: Deformation und Elastizität

a) Für kleine Längenänderungen gilt

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{F}{A}\frac{L}{E}$$

wobei

$$A = \pi(1 \cdot 10^{-3}\ m)^2 = 3.14 \cdot 10^{-6}\ m^2$$

Die Gewichtskraft der Masse ist geviertelt, da jedes der Drahtseile ein Viertel des Gewichts trägt:

$$F = \frac{1}{4}mg = 123\ N$$

Also beträgt die Dehnung der Seile:

$$\Delta L = \frac{123\ N}{3.14 \cdot 10^{-6}\ m^2}\frac{3\ m}{1.8 \cdot 10^{11}\ N/m^2} = 6.5 \cdot 10^{-6}\ m\ (= 0.65\ mm)$$

b) Die durch Druck verursachte Verringerung des Volumens V eines Körpers ($\Delta V < 0$) nennt man Kompression. Quantitativ wird die Kompression durch des Kompressionsmoduls K erfasst:

$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V}$$

K ist gegeben durch

$$K = \frac{E}{3}\frac{1}{1-2\mu}$$

mit μ als Poissonzahl

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1$$

Daher ist

$$K = \frac{E}{3}\frac{1}{3\left(3 - \frac{E}{G}\right)} = 1.92 \cdot 10^{11}\ N/m^2$$

Dann ergibt sich für ΔV

$$\Delta V = -\frac{\Delta p}{K}V = -1.12\ cm^3$$

Lösung 2: Benetzung

Die Platten stehen zueinander parallel. Damit ergibt sich die Masse des aufgestiegenen Wassers zu $m = \rho dlh$, wobei d der Plattenabstand, l die Plattenlänge und h die Höhe des aufgestiegenen Wassers ist. Die Höhe des Schwerpunkts dieser Masse befindet sich bei $\tilde{h} = \frac{1}{2}h$. Daraus folgt für die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = mg\tilde{h} = \frac{1}{2}g\rho dlhh = \frac{1}{2}g\rho dlh^2$$

Aus infitesimalen Änderungen der Höhe h folgt die potentielle Energie

$$dE_{\text{pot}} = g\rho dlh \cdot dh$$

Die Oberflächenspannung zwischen den einzelnen Grenzflächen ist $\sigma_{i,j}$ mit $i, j = 1(\text{fest}), 2(\text{flüssig}), 3(\text{gasförmig})$. Wasser ist in Luft an Glas eine benetzende Flüssigkeit. Es gilt also $\sigma_{1,2} - \sigma_{1,3} < \sigma_{2,3}$. Der Randwinkel an der Grenzschicht, $\cos\phi = \frac{\sigma_{1,2}-\sigma_{1,3}}{\sigma_{2,3}}$, ist daher nicht definiert und die Flüssigkeit bildet einen Film auf der gesamten Fläche der beiden Glascheiben. Eine Zunahme der Höhe resultiert also in einer Verringerung der benetzten Oberfläche

$$\Delta A = -2l\Delta h = 2ldh$$

Die Oberflächenernergie ändert sich dadurch mit

$$\Delta E_{\text{Ofl}} = -\sigma\Delta A = 2l\sigma\Delta h$$

Wobei $\sigma = \sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}$ gilt. In der Gleichgewichtslage befindet sich das System energetisch im Minimum. Eine infitesimale Änderung der Gesamtenergie verschwindet daher. Daraus lässt sich die Höhe ableiten.

$$\begin{aligned} 0 = dE_{\text{ges}}(h_{\min}) &= dE_{\text{pot}} + dE_{\text{Ofl}} \\ \rho gdlhdh &= 2\sigma dhl \\ h &= \frac{2\sigma}{\rho gd} \end{aligned}$$

Mit $\sigma = 72,75 \cdot 10^{-3}\ N/m$, $d = 10^{-4}\ mm$ und $\rho = 10^3\ kg/m^3$ ergibt sich damit

$$h = \frac{72,75 \cdot 10^{-3}\ N/m}{10^3\ kg/m^3 \cdot 9,81\ N/kg \cdot 10^{-4}\ m} = 0,148\ m \approx 15\ cm$$

Zu beachten ist, dass dies nur für eine vollständig benetzende Flüssigkeit gilt und somit einen maximalen Wert darstellt. Bei konkaven oder konvexen Übergängen beläuft sich die Höhe auf

$$h(\varphi) = \frac{2\sigma}{\rho gd} \cdot \cos\varphi$$

mit dem Randwinkel $\cos\varphi = \frac{\sigma_{1,3}-\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,3}}$

Lösung 3: Eisbergantrieb

a) Die Auftriebskraft F_A und die Gewichtskraft F_G sind hier im Gleichgewicht, so dass gilt:

$$F_A = F_G$$

Also

$$\rho_{MW} V g = m_E g$$

wobei V das Volumen des verdrängten Meerwassers bezeichnet und m_E die Masse des Eisbergs. Also kann nach L aufgelöst werden:

$$\rho_{MW} Lb(d-h)g = \rho_E Lbdg$$
$$\rightarrow d = \frac{\rho_{MW} h}{\rho_{MW} - \rho_E} = 612\ m$$

b) Der Schweredruck p_s ist gegeben durch

$$p_s = \rho_{SW} g(h-s) = 5.4 \cdot 10^5\ Pa\ (= 5.4\ bar)$$

Es gilt die Bernoulli-Gleichung sowie die Annahme, dass der statische Druck innen und außen annähernd gleich sind:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho_{SW} v_{SW}^2 + \rho g s = p_0 + \rho_{SW} g h$$
$$\frac{1}{2}\rho_{SW} v_{SW}^2 = \rho g(h-s) = p_s$$
$$\Rightarrow v_{SW} = \sqrt{\frac{2p_s}{\rho_{SW}}} = \sqrt{2g(h-s)} = 32.8\ m/s$$

c) Der Massenstrom I_{SW} ist gegeben durch

$$I_{SW} = \rho_{SW} v_{SW} q = 3.3 \cdot 10^6\ kg/s$$

d) Die Rückstoßkraft ist natürlich bestimmt durch die Impulsänderung:

$$F_R = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m v_{SW}) = v_{SW} I_{SW} = 1.09 \cdot 10^8\ N$$

e) Man verwendet hier das Ergebnis aus d):

$$v_E = at = \frac{F_R}{m} t = \frac{v_{SW} I_{SW} t}{lbd\rho_E} = 1.72 \cdot 10^{-2}\ m/s$$

Lösung 4: Weinfass

a) Die Ausströmgeschwindigkeit wird durch zweimalige Anwendung der Bernoulli-Gleichung bei der Höhe $h_0 = 2.20\ m$ und bei der Höhe $h_1 = 0.20\ m$ ermittelt. Die zu den Bernoulli-Gleichungen gehörenden Geschwindigkeiten sind $v_0 = 0\ m/s$ bei der Höhe h_0 und die gesuchte Ausströmgeschwindigkeit v_1 bei der Höhe h_1. Desweiteren gilt:

$$p_0 = p_1 = p,$$

da der Außendruck gleichmäßig überall auf die Flüssigkeit wirkt. Allgemein gilt:

$$p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 + \rho g h_0 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g h_1$$

Mit Einsetzen der Randbedingungen ergibt sich:

$$\rho g h_0 = \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g h_1$$

Daraus folgt für die gesuchte Ausströmgeschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{2g(h_0 - h_1)} = 6.26\ m/s$$

b) Die Fallhöhe ergibt sich aus

$$H = h + h_1 = 1.2\ m$$

Die Fallzeit beträgt einfach

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 0.5\ s$$

Der zurückgelegte Weg ist dann:

$$s = v_1 \cdot t = 0.5\mathrm{s} \cdot 6.26\mathrm{m/s} = 3.1\ m$$

c) Die Fallzeit beträgt immer noch $t = 0.5\ s$. Da der Most 6 m durch den Keller spritzt, ist nun die Ausströmgeschwindigkeit:

$$v_2 = \frac{s_2}{t} = 12\ m/s$$

Die Bernoulli-Gleichung muss nun den veränderten Druck in Betracht ziehen:

$$p_2 + \rho g h_0 = p_0 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g h_1$$

p_2 ist gegeben durch $p_0 + \Delta p$. Daher ergibt sich:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g (h_1 - h_0) = 0.54\ bar$$

d) Aus dem Hagen-Poiseuille'schem Gesetz folgt, dass I proportional zu R^4 ist.

Lösung 5: Trichterfluss

a) Es gilt die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

An der Oberfläche des Trichters herrscht Atmosphärendruck, also $p_1 = p_0$, ebenso im austretenden Wasserstrahl, also $p_2 = p_0$. Daher:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Weiterhin gilt die Kontinuitätsgleichung

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

also

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1}$$

Zusammen mit der Bernoulli-Gleichung sind dies zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten v_1 und v_2. Elimination von v_1 ergibt:

$$v_2^2 = \frac{2gh}{1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}} = \frac{2gh}{1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}}$$

Einsetzen der gegebenen Werte liefert die Geschwindigkeit des Wasserstrahls:

$$v_2 = 1.5\ m/s$$

b) Aus der Austrittsgeschwindigkeit und der Querschnittsfläche der Austrittsöffnung ergibt sich der Volumenstrom

$$\Omega = A_2 v_2$$

und die Zeit für das Auslaufen des Volumens V ist

$$t = \frac{V}{\Omega} = \frac{V}{A_2 v_2}$$

also

$$t = 23.6\ s$$

c) Mit zunehmender Fallstrecke y nimmt die Fallgeschwindigkeit des Wassers zu. Wäre der Strahlquerschnitt konstant, dann würde daher der Volumenstrom des Wassers mit y zunehmen. Dies kann aber nicht sein, denn der Volumenstrom ist wegen der Inkompressibilität eine Erhaltungsgröße, d.h. unabhängig von y. Also muss der Strahlquerschnitt zum Ausgleich abnehmen. Für den Volumentstrom $\Omega(y)$ gilt

$$\Omega(y) = A(y)v(y) = \text{const.} = A_2 v_2$$

Die Fallgeschwindigkeit als Funktion der Fallhöhe ergibt sich aus der Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho v^2(y) - \rho g y = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

(negatives Vorzeichen von $\rho g y$, da y nach unten zeigt.) Also

$$v(y) = \sqrt{v_2^2 + 2gy}$$

Damit wird die Stromerhaltung zu

$$A(y)\sqrt{v_2^2 + 2gy} = A_2 v_2$$

bzw. mit $A = \pi d^2/4$

$$d^2(y)\sqrt{v_2^2 + 2gy} = d_2^2 v_2$$

und schließlich

$$d(y) = d_2 \sqrt{\frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + 2gy}}}$$

Mit den angegebenen Werten ergibt sich für $y = 24,0\ cm$:

$$d(y) = 4,5\ mm$$

Lösung 6: Ballon

a) Mit Hilfe der barometrischen Höhenformel

$$p(z) = p_0 \; e^{-g \frac{\rho_0}{p_0} z}$$

erhält man für den Luftdruck in 600 m Höhe

$$p(600m) = 926,7 \; hPa$$

Die Dichte der Luft erhält man auch aus der barometrischen Höhenformel. Wegen $p/\rho = p_0/\rho_0 = \text{const.}$ folgt

$$\rho(z) = \rho_0 \; e^{-g \frac{\rho_0}{p_0} z}$$

Damit ergibt sich für die Luftdichte in 600 m Höhe

$$\rho(600m) = 1,198 \; kg/m^3$$

b) Die Auftriebskraft entspricht der durch den Ballon verdrängten Luftmasse. Am Boden ergibt sich also

$$F_A(z = 0m) = \rho_0 V_0 g = 38,1 \; kN$$

und in einer Höhe von 600 m

$$F_A(z = 600m) = \rho(600m) V_0 g = 35,3 \; kN$$

c) Wenn der Ballon gerade noch auf eine Höhe von 600 m aufsteigen soll, müssen sich Auftriebs- und Gewichtskraft in dieser Höhe gerade kompensieren. Die maximale Last ist dann gegeben durch

$$m_{max} = \frac{F_A(600m)}{g} = \rho(600m) V_0 = 3,6 \; t$$