Ferienkurs Experimentalphysik 1

Wintersemester 2013/2014

Thomas Maier

Lösung 2: Stöße und Starre Körper

Lösung 1: Gewehrschuss in Block

a) Es handelt sich um einen vollständig inelastischen Stoß. Nach dem Stoß gilt Energieerhaltung (für kleine Auslenkungen)

$$E_{\text{kin, max}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 = E_{\text{pot, max}} = (m_1 + m_2)gl(1 - \cos\theta)$$

Mit der Impulserhaltung $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_2$ folgt

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = (m_1 + m_2)gl(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{(m_1 + m_1)}{m_1}\sqrt{2gl(1 - \cos\theta)} = 262,5\ m/s$$

b)

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 0,066\ m/s$$

c)

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 = 172,2\ J$$

Lösung 2: Bewegung im Schwerpunktsystem

Der Schwerpunkt des Stab-Massen-Systems ist gegeben durch den Positionsvektor

$$\vec{R}_S(t) = \frac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2}$$

wobei $\vec{r}_1(t)$ die Position des Schwerpunkts des Stabes und $\vec{r}_2(t)$ die Position der Punktmasse darstellt. Der Schwerpunkt des Stabes zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ ist gegeben durch

$$\vec{r}_1(0) = \frac{L}{2}\vec{e}_y$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Punktmasse am Koordinatenursprung, also ist $\vec{r}_2(0) = 0$. Also ergibt sich

$$\vec{R}_S(0) = \frac{M\frac{L}{2}\vec{e}_y}{2M} = \frac{L}{4}\vec{e}_y$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts ist gegeben durch

$$\vec{V}_S(t) = \frac{m_1\vec{v}_1(t) + m_2\vec{v}_2(t)}{m_1 + m_2}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ruht der Stab; deshalb ist $\vec{v}_1(0) = 0$. Zu diesem Zeitpunkt bewegt sich die Punktmasse in die positive $x-$Richtung und ihre Geschwindigkeit ist gegeben durch $\vec{v}_2(0) = V_0\vec{e}_x$. Also ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$\vec{V}_S(t) = \frac{MV_0}{2M}\vec{e}_x = \frac{V_0}{2}\vec{e}_x$$

Weil keine äußeren Kräfte auf das System wirken, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Systems konstant und sein Ortsvektor ist gegeben durch

$$\vec{R}_S(t) = \vec{R}_S(0) + \vec{V}_S \cdot t = \frac{L}{4}\vec{e}_y + \frac{V_0}{2}t\vec{e}_x$$

Lösung 3: Mehrteilchensystem

Auf das System wirken nur innere Kräfte, d.h. die Personen treffen sich genau im Schwerpunkt des Systems. Für dessen konstante Position gilt

$$S = \frac{m\ x_1 + M\ x_2}{m + M}$$

Wenn wir nun den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Startpunkt von Person M legen gilt $x_2 = 0$, $x_1 = d_0$ und $S = d$, also

$$d = \frac{m\ d_0}{m + M} = 18,75\ m$$

Lösung 4: Kugellooping

Zuerst wird eine Formel für die Geschwindigkeit hergeleitet. Mit dem Energieerhaltungssatz ergibt sich für den höchsten Punkt des Loopings

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2 + mg2R$$

Mit

$$\theta = \frac{2}{5}mr^2 \qquad \omega = \frac{v}{r}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2 + 2mgR = \frac{7}{10}mv^2 + 2mgR \\ \Rightarrow gh &= \frac{7}{10}v^2 + 2gR \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{10}{7}g(h - 2R). \end{aligned}$$

a)

$$F_{\text{Zentripetal}} = m\omega^2(R-r) = \frac{mv^2}{R-r}$$

Damit die Kugel auf der Bahn bleibt, muss gelten

$$\begin{aligned} mg = F_{\text{Zentripetal}} &= \frac{mv^2}{R-r} = \frac{m\frac{10}{7}g(h-2R)}{R-r} \\ \Rightarrow h = 2,7R - 0,7r &\approx 2,7R \end{aligned}$$

b) Energieerhaltung in Q liefert

$$\begin{aligned} mg(6R) &= \frac{7}{10}mv^2 + mgR \quad \Rightarrow v^2 = \frac{50gR}{7} \\ F_{\text{Zentripetal}} &= \frac{mv^2}{R-r} = \frac{50mgR}{7(R-r)} \\ R \gg r &\quad \Rightarrow F_{\text{Zentripetal}} \approx \frac{50}{7}mg \end{aligned}$$

Noch eine etwas andere Art die Aufgabe zu lösen:

a)

$$\begin{aligned} \Delta E_{Pot} &= \Delta E_{Kin} - \Delta E_{Rot} \\ mg\Delta h &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 \end{aligned}$$

Höhenunterschied: $\Delta h = y$, Rollbedingung: $\omega = \frac{v}{r}$, Trägheitsmoment: $\Theta = \frac{2}{5}mr^2$

$$\begin{aligned} mgy &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv^2 \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{10gy}{7}} \end{aligned}$$

Am Scheitelpunkt des Loopings gilt dann $y = h - 2R$ sowie

$$\begin{aligned} F_G &= F_Z \\ mg &= \frac{mv^2}{R} = \frac{10}{7}mg\frac{y}{R} \\ \Rightarrow y &= \frac{10}{7}R = h - 2R \\ \Rightarrow h &= \frac{27}{10}R \end{aligned}$$

b) Wenn $h = 6R$ dann ist $y = 5R$ am Punkt Q. In horizontaler Richtung wirkt nur die Zentripetalkraft

$$F_Z = \frac{mv^2}{R} = \frac{10}{7}mg\frac{y}{R} = \frac{50}{7}mg$$

Lösung 5: Inhomogener Zylinder

Da der Auflagepunkt zu jedem Zeitpunkt der ruhende Punkt ist, kann die Bewegung als Drehung um diesen aufgefasst werden. Die Kraft, die das Drehmoment hervorruft, ist der Teil Gewichtskraft auf den Schwerpunkt, welcher parallel zur Ebene angreift:

$$M = Rmg \sin \alpha$$

Das zugehörige Trägheitsmoment um den Auflagepunkt ist mit dem Satz von Steiner

$$I' = I_0 + mR^2 = \frac{47}{30} mR^2$$

Es gilt die Bewegungsgleichung

$$M = \dot{L} = I' \dot{w}$$

und die Rollbedingung

$$\ddot{s} = R\dot{w}$$

Damit ergibt sich für die Beschleunigung $\ddot{s}$ entlang der Ebene

$$\ddot{s} = R\dot{w} = R\frac{M}{I'} = \frac{30}{47} g \sin \alpha = 3,2\ m/s$$

Lösung 6: Karussell

a) Das Gesamtträgheitsmoment lässt sich aus dem Satz von Steiner bestimmen. Es ergibt sich für zwei Massen m im Abstand r also

$$I_{ges} = \frac{1}{2} Mr^2 + 2mr^2 = 2320\ kgm^2$$

b) Zunächst bestimmen wir das Drehmoment, das das dritte Kind aufbringt

$$M = r \cdot F = 200\ J$$

Dies kann in Relation mit der Winkelbeschleunigung $\dot{w}$ gesetzt werden

$$M = I_{ges} \cdot \dot{w}$$

welche auch noch gegeben ist über $\dot{w} = \frac{\Delta w}{\Delta t}$. Daraus folgt schließlich

$$\Delta t = \frac{\Delta w}{\dot{w}} = \frac{I_{ges} \Delta w}{rF} = 7,29\ s$$

c) Sobald die Zentrifugalkraft die Haftreibungskraft überschreitet, fallen die Kinder herunter. Wir berechnen nun den Grenzfall, wo sich beide Kräfte gegenseitig aufheben.

$$F_R = F_Z$$
$$\mu mg = mw^2 r$$

Hieraus folgt die Grenzwinkelgeschwindigkeit

$$w = \sqrt{\frac{\mu g}{r}} = 1,57\ s^{-1}$$

Also ab einer Drehfrequenz von $f = 0,25$ Umdrehungen pro Sekunde fliegen die Kinder herunter.