Ferienkurs Experimentalphysik 1

Wintersemester 2013/2014

Thomas Maier

Lösung 1: Mechanik eines Massenpunktes

Lösung 1: Fliegender Pfeil

Es gilt die allgemeine Bewegungsgleichung

$$x(t) = x_0 + v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$
$$y(t) = y_0 + v_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

mit $x_0 = y_0 = 0$, $v_x = v_0 \cos(\alpha)$, $v_y = v_0 \sin(\alpha)$, $a_y = -g$ und $a_x = 0$ erhält man die speziellen Bewegungsgleichungen

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t$$
$$y(t) = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

a) **Reichweite**: Der Pfeil treffe zur Zeit t_1 auf dem Boden auf. Dann gilt

$$y(t_1) = 0$$
$$\Rightarrow \left(v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_1\right) t_1 = 0$$
$$\Rightarrow t_1 = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Setzt man dies nun in $x(t)$ ein erhält man die Reichweite

$$x(t_1) = \frac{2 v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} =: x_{max}(\alpha)$$

und damit $x_{max}(30°) = 1247,2\ m$

Höhe: Der Pfeil sei zur Zeit t_2 am höchsten Punkt. Dann gilt

$$\dot{y}(t_2) = 0$$
$$\Rightarrow v_0 \sin(\alpha) - g t_2 = 0$$
$$\Rightarrow t_2 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Setzt man dies nun in $y(t)$ ein erhält man die Höhe

$$y(t_2) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} =: y_{max}(\alpha)$$

und damit $y_{max}(30°) = 45,0\ m$

b) Um die Reichweite zu maximieren muss man die Gleichung für x_{max} ableiten

$$\begin{aligned} &\frac{dx_{max}(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{2v_0^2}{g}(\cos^2(\alpha_1) - \sin^2(\alpha_1)) = 0 \\ &\Rightarrow \tan^2(\alpha_1) = 1 \\ &\Rightarrow \alpha_1 = 45° \end{aligned}$$

und die Reichweite aus $x_{max}(\alpha_1) = 1440\ m$

c) Die maximale vertikale Auftreffgeschwindigkeit erhält man natürlich bei einem Abschusswinkel von $\alpha_2 = 90°$ (da $v_x = \text{const.}$). Man erhält damit für die Höhe $y_{max}(\alpha_2) = 180\ m$

Lösung 2: Masse auf Kugel

Auf die Masse wirken die radiale Komponente der Gravitationskraft $F_{G,r} = mg\cos\theta$ und die Fliehkraft $F_Z = \frac{mv^2}{R}$ jeweils in entgegengesetzter Richtung. Zum Zeitpunkt des Lösens gilt nun

$$F_{G,r} = F_Z$$

Zudem wurde bereits $\Delta E = mg(R-h)$ an potentieller Energie in kinetische umgewandelt, d.h.

$$\begin{aligned} mg\cos\theta &= m\frac{v^2}{R} \\ \frac{1}{2}mv^2 &= mg(R-h) \end{aligned}$$

Aus der Beziehung $h = R\cos\theta$ folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mgR(1-\cos\theta) \\ &= mgR(1-\frac{v^2}{Rg}) \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{2}{3}Rg} \end{aligned}$$

und für die Höhe h ergibt sich

$$h = R\cos\theta = \frac{v^2}{g}$$

Lösung 3: Masse auf Scheibe

Die Drehscheibe liege in der xy-Ebene und der Ursprung des Koordinatensystems sei im Mittelpunkt der Drehscheibe. Der Winkel zwischen Schiene und x-Achse sei $\varphi(t) = wt$.

a) Die Vektoren für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = v_0 t \begin{pmatrix} \cos(wt) \\ \sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos(wt) - wt\sin(wt) \\ \sin(wt) + wt\cos(wt) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = v_0 w \begin{pmatrix} -2\sin(wt) - wt\cos(wt) \\ 2\cos(wt) - wt\sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Für die Kraft als Funktion der Zeit ergibt sich

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$$

mit dem Betrag

$$F(t) = |\vec{F}(t)| = m v_0 w \sqrt{4 + (wt)^2}$$

Für das Drehmoment erhält man

$$\vec{M}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) = m v_0^2 wt \begin{pmatrix} \cos(wt) \\ \sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\sin(wt) - wt\cos(wt) \\ 2\cos(wt) - wt\sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2 m v_0^2 wt \vec{e}_z$$

c) Für den Drehimpuls gilt

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m v_0^2 t \begin{pmatrix} \cos(wt) \\ \sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(wt) - wt\sin(wt) \\ \sin(wt) + wt\cos(wt) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= m v_0^2 w t^2 \vec{e}_z$$

Lösung 4: Ruhende Leiter

Auf die Leiter wirken drei Kräfte. Die Gravitationskraft $\vec{F}_G$ die in der Mitte der Leiter angreift. Die Kraft $\vec{F}_W$ welche die Wand auf die Leiter ausübt (diese hat aufgrund der Annahme einer rutschigen Wand nur eine Komponente senkrecht zur Wand) und die Kraft $\vec{F}_B$ welche der Boden auf die Leiter ausübt. Wenn die Leiter sich nicht bewegen soll, muss sowohl die Gesamtkraft als auch das gesamte Drehmoment verschwinden. Als Bezugspunkt wählen wir den Fuß der Leiter.

$$0 = \vec{F}_W + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \begin{pmatrix} F_W \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_R \\ F_N \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$F_W = F_R$$
$$F_N = mg$$

und mit den Angriffspunkten

$$\vec{r}_W = l \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_G = \frac{l}{2} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

(außerdem $\vec{r}_B = 0$) gilt für das Drehmoment

$$\begin{aligned} 0 = \vec{M} &= \vec{r}_W \times \vec{F}_W + \vec{r}_G \times \vec{F}_G \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -lF_W \sin\alpha - \frac{l}{2}mg\cos\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also

$$F_W = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{2}mg = \frac{mg}{2\tan\alpha}$$

Die Kraft, die die Leiter auf die Wand ausübt, ist die Gegenkraft

$$F_{\text{auf W}} = -\frac{mg}{2\tan\alpha}\vec{e}_x$$

Die Kraft mit der der Boden das Wegrutschen der Leiter verhindert ist die horizontale Komponente der Bodenkraft

$$F_R = -\frac{mg}{2\tan\alpha}\vec{e}_x$$

Lösung 5: Corioliskraft

Die Corioliskraft ist allgemein definiert als

$$\vec{F}_C = 2m(\vec{v} \times \vec{w})$$

a) Für die Winkelgeschwindigkeit w der Erde gilt

$$w = \frac{2\pi}{T} = 7,27 \cdot 10^{-5}\ 1/s$$

Im Falle des sich mit v nach Norden bewegenden Zuges am Breitengrad ϕ ergibt sich ein Betrag der Corioliskraft von

$$|\vec{F}_C| = 2m|\vec{v}||\vec{w}|\sin\phi = 600\ N$$

b) Die Corioliskraft zeigt nach Osten.

c) Die Zentrifugalkraft bei der Fahrt durch eine Kurve mit Radius r ist

$$F_Z = m\frac{v^2}{r}$$

also wäre der Kurvenradius, den der Zug fahren müsste um diesselbe Kraft auf die Schienen auszuüben wie F_C

$$r = \frac{mv^2}{F_C} = 513\ km$$

Lösung 6: Gravitationskraft

Die Gravitationskraft ist allgemein definiert als

$$\vec{F_G} = G\frac{Mm}{r^2}\vec{e_r}$$

a) Die Kugel mit Masse m wird durch die Gravitationskraft F_G beschleunigt, also gilt für die Beschleunigung a

$$a = \frac{F_G}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

Diese Beschleunigung führt nach einer Zeit von $t = 1800\ s$ zu einer zurückgelegten Strecke von

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 0,108\ m$$

wir erhalten also für die Gravitationskonstante mit einem Abstand von $r = 1\ m$ und $M = 1000\ kg$

$$G = \frac{ar^2}{M} = \frac{2sr^2}{t^2M} = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{s^2kg}$$

b) Aus der Gravitationsbeschleunigung auf der Erde

$$g = G\frac{M_E}{R_E^2}$$

lässt sich mit der berechneten Gravitationskonstante aus a) und dem Erdradius $R_E = 6378\ km$ die Erdmasse berechnen

$$M_E = \frac{gR_E^2}{G} = 5,98 \cdot 10^{24}\ kg$$

und damit die mittlere Dichte der Erde

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M_E}{4\pi R_E^3} = 5500\ \frac{kg}{m^3}$$

Lösung 7: Bezugsysteme

Da sich der Zug mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, handelt es sich um ein nicht beschleunigtes Bezugsystem.

a) Im Zug gilt die Bewegungsgleichung

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Der Gegenstand treffe zur zeit t_0 auf dem Boden auf, dann gilt

$$
\begin{aligned}
z(t_0) &= h - \frac{1}{2} g t_0^2 \\
\Rightarrow t_0 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,64\ s
\end{aligned}
$$

b) Der Fahrgast und der Gegenstand befinden sich beide im Bezugsystem des Eisenbahnwagens. Der Fahrgast sieht einen 'freien Fall'.

c) Für die Bahnkurve des Gegenstandes aus dem Bezugsystem außerhalb des Zuges gilt

$$
\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ 0 \\ h - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}
$$

also

$$
\begin{aligned}
x(t) &= v_0 t \\
z(t) &= h - \frac{1}{2} g t^2
\end{aligned}
$$

Die Elimination von t liefert schließlich

$$
z(x) = h - \frac{g x^2}{2 v_0^2}
$$