Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Fouriertransformation

Autor: Benjamin Rüth

Stand: 20. März 2014

Aufgabe 1 (Faltung) Es sei $f(t) = e^{-|t|}$.

1.1 Man berechne die Faltung $(f * f)(t)$. *(Tipp: Fallunterscheidung $t \geq 0$ und $t < 0$.)*

1.2 Man berechne die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f(t))(\omega)$.

1.3 Unter Zuhilfenahme der Faltung bestimme man $\mathcal{F}(|t|e^{-|t|})(\omega)$.

Lösung: (.1) Um die Faltung $f * f$ mit $f(t) = e^{-|t|}$ zu erhalten, ist das folgende Integral zu bestimmen:

$$(f * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|} e^{-|\tau|} \mathrm{d}\tau \,.$$

Wir lösen die Beträge durch eine Fallunterscheidung auf:

(i) Fall $t \geq 0$. In diesem Fall gilt $t - \tau \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \tau$:

$$\begin{aligned}(f * f)(t) &= \int_{t}^{\infty} e^{t-2\tau} \mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} e^{-t} \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{-t+2\tau} \mathrm{d}\tau \\ &= e^{t} \left[-\frac{1}{2} e^{-2\tau} \right]_{t}^{\infty} + te^{-t} + e^{-t} \left[\frac{1}{2} e^{2\tau} \right]_{-\infty}^{0} \\ &= \frac{1}{2} e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2} e^{-t} = e^{-t}(1+t) \,.\end{aligned}$$

(ii) Fall $t < 0$. In diesem Fall gilt $t - \tau \geq 0 \Leftrightarrow 0 > t \geq \tau$:

$$\begin{aligned}(f * f)(t) &= \int_{0}^{\infty} e^{t-2\tau} \mathrm{d}\tau + \int_{t}^{0} e^{t} \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{t} e^{-t+2\tau} \mathrm{d}\tau \\ &= e^{t} \left[-\frac{1}{2} e^{-2\tau} \right]_{0}^{\infty} + 0 - te^{t} + e^{-t} \left[\frac{1}{2} e^{2\tau} \right]_{-\infty}^{t} \\ &= \frac{1}{2} e^{t} - te^{t} + \frac{1}{2} e^{t} = e^{t}(1-t) \,.\end{aligned}$$

Wir können (i) und (ii) zusammenfassen und erhalten für die Faltung:

$$(f * f)(t) = (1 + |t|) e^{-|t|} \,.$$

(.2) Um die Fouriertransformierte von $f(t) = e^{-|t|}$ zu bestimmen, lösen wir den Betrag im zu berechnenden Integral auf:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-i\omega)} \mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{t(-1-i\omega)} \mathrm{d}t \\ &= (1-i\omega)^{-1} + (1+i\omega)^{-1} = \frac{2}{1+\omega^2} \,.\end{aligned}$$

(.3) Um nun die Fouriertransformierte von $g(t) = |t|\, e^{-|t|}$ zu bestimmen, nutzen wir (.1) und (.2) aus, es gilt nämlich

$$g(t) = |t|\, e^{-|t|} = (1 + |t|)\, e^{-|t|} - e^{-|t|} = (f * f)(t) - f(t)\,.$$

Wegen der Linearität der Fouriertransformation erhalten wir hieraus:

$$\mathcal{F}(|t|\, e^{-|t|})(\omega) = \mathcal{F}\left((f * f)(t) - f(t)\right)(\omega) = \mathcal{F}\left((f * f)(t)\right)(\omega) - \mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega)\,.$$

Mithilfe des Faltungssatzes $(f * g)(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad F(\omega)\, G(\omega)$ erhalten wir nun

$$\mathcal{F}\left((f * f)(t)\right)(\omega) = \left(\mathcal{F}(f(t))(\omega)\right)^2 = \frac{4}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

Schließlich erhalten wir ganz einfach die gesuchte Fourierkorrespondenz:

$$g(t) = |t| e^{-|t|} \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad \frac{4}{(1+\omega^2)^2} - \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

Aufgabe 2 (Faltung,schwer!) Es sei s mit $s(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $x \in [0, 2\pi)$ eine 2π-periodische Sägezahnfunktion.

2.1 Zeigen Sie, dass die Faltung $(s * s)(x)$ wieder eine 2π-periodische Funktion ergibt.

2.2 Berechnen Sie die periodische Faltung $(s * s)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(x-t)s(t)\, \mathrm{d}t$ für $x \in \mathbb{R}$ direkt.

2.3 Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten c_k der Funktion $s{*}s$ durch direkte Rechnung.

Lösung:

(.1) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Funktionen mit der Periode T. Dann ist die periodische Faltung von f und g wegen der Periodizität von f ebenfalls T-periodisch, denn:

$$(f * g)(x + T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x + T - t) g(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T f(x - t) g(t)\, \mathrm{d}t = (f * g)(x)\,.$$

Daher ist die Faltung also wiederum periodisch.

(.1) Da die betrachtete Sägezahnfunktion 2π-periodisch ist, genügt es deshalb, die Faltung für $x \in [0, 2\pi)$ zu berechnen. Für $x \in [-2\pi, 0)$ gilt $s(x) = -\frac{x+\pi}{2}$, so dass sich auf $[0, 2\pi)$ folgendes ergibt:

$$\begin{aligned}
(s * s)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(x-t)s(t)\, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^x s(x-t)s(t)\, \mathrm{d}t + \int_x^{2\pi} s(x-t)s(t)\, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^x (t - x + \pi)(\pi - t)\, \mathrm{d}t + \int_x^{2\pi} (t - x - \pi)(\pi - t)\, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{8\pi} \left[2\pi^2 x - \pi x^2 - \frac{2}{3}\pi^3 \right] = \frac{6\pi x - 3x^2 - 2\pi^2}{24} = \frac{\pi^2 - 3(x-\pi)^2}{24}
\end{aligned}$$

Die periodische Faltung $s * s$ ist dann die 2π-periodische Fortsetzung dieser Funktion.

(.3) Für $k = 0$ ergibt sich der zugehörige Fourierkoeffizient als

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2 - 3(x-\pi)^2}{24} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi^2 - 3u^2\right) \, \mathrm{d}u = 0,$$

wobei die Substitution $u = x - \pi$ verwendet wurde.
Für $k \neq 0$ gilt unter Verwendung derselben Substitution:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{48\pi} \int_0^{2\pi} \left(\pi^2 - 3(x-\pi)^2\right) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{-ik\pi}}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 3u^2)\, e^{-iku} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{e^{-ik\pi}}{48\pi} \left[e^{-iku} \left(\frac{3u^2}{ik} - \frac{6u}{k^2} - \frac{6}{ik^3} - \frac{\pi^2}{ik} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} \end{aligned}$$

Bestimmt man unter Verwendung von $e^{ik\pi} = e^{-ik\pi}$ den Wert in der eckigen Klammer, so ergibt sich schließlich für die Fourierkoeffizienten:

$$c_k = \frac{e^{-ik\pi}}{48\pi} \left[e^{ik\pi} \left(-\frac{12\pi}{k^2} \right) \right] = -\frac{1}{4k^2}\,.$$

Für die Fourierreihe von $s * s$ erhalten wir damit:

$$F_{s*s}(x) = -\frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{ikx}}{k^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad F_{s*s}(x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 3 (Fouriertransformation) Für $\lambda > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ sei $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 0 \\ \exp((-\lambda + ia)t) & , \quad t > 0 \end{cases}$.

3.1 Man berechne die Fouriertransformierte von $f(t)$.

3.2 Wie lauten die Fouriertransformierten der *gedämpften Schwingungen*

$$x(t) = e^{-\lambda t} \cos Nt \quad \text{und} \quad y(t) = e^{-\lambda t} \sin Nt\,, \;\; N \in \mathbb{N}\,, \;\; t > 0?$$

Lösung: (.1) Die Fouriertransformation F von f erhalten wir durch Berechnen des folgenden Integrals:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{(-\lambda + ia)t} e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{(-\lambda + i(a-\omega))t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{-\lambda + i(a-\omega)} e^{-(\lambda - i(a-\omega))t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda + i(\omega - a)}\,. \end{aligned}$$

(.2) Wir nutzen die folgenden bekannten Formeln für den Kosinus und Sinus:

$$\cos(Nt) = \frac{1}{2}\left(e^{iNt} + e^{-iNt}\right) \quad \text{und} \quad \sin(Nt) = \frac{1}{2i}\left(e^{iNt} - e^{-iNt}\right) .$$

Wegen $t > 0$ und dem Teil (a) erhalten wir nun als Fouriertransformierte $X(\omega)$ für $x(t)$:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \frac{1}{2}\, \left(e^{iNt} + e^{-iNt}\right)\, e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\, \left(\frac{1}{\lambda + i(\omega - N)} + \frac{1}{\lambda + i(\omega + N)}\right) = \frac{\lambda + i\omega}{(\lambda + i\omega)^2 + N^2} \end{aligned}$$

und analog als Fouriertransformierte $Y(\omega)$ für $y(t)$:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \frac{1}{2i}\, \left(e^{iNt} + e^{-iNt}\right)\, e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}\, \left(\frac{1}{\lambda + i(\omega - N)} - \frac{1}{\lambda + i(\omega + N)}\right) = \frac{N}{(\lambda + i\omega)^2 + N^2} . \end{aligned}$$

Für $\lambda \to 0^+$ wird $X(\omega), Y(\omega)$ immer *schmalbandiger* ($\to$ geringe Dämpfung). Im Grenzfall $\lambda = 0$ haben $X(\omega)$ und $Y(\omega)$ zwei Pole bei $\pm N$.

Aufgabe 4 (Fouriertransformation) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - |t|) & , \quad |t| \le 1 \\ 0 & , \quad |t| > 1 \end{cases}$$

und bestätigen Sie mithilfe der Rücktransformation $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi$.

Lösung: Wir erhalten die Fouriertransformierte F von f durch Bestimmen des folgenden Integrals

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t}\frac{1}{2}(1 - |t|)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^{-i\omega t}(1 + t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-i\omega t}(1 - t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\left(\frac{1}{-i\omega} + \frac{t}{-i\omega} - \frac{1}{(-i\omega)^2}\right)\Bigg|_{-1}^0 + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\left(\frac{1}{-i\omega} - \frac{t}{-i\omega} + \frac{1}{(-i\omega)^2}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{\omega^2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right)\right) = \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{(\frac{\omega}{2})}\right)^2 , \end{aligned}$$

wobei wir zuerst $\omega = 0$ wegen der Division durch ω ausschließen müssen und schließlich $\omega = 0$ wieder gewinnen, indem wir F in null durch $F(0) = \frac{1}{2}$ stetig fortsetzen.

Die inverse Fouriertransformation besagt schließlich, dass für alle t gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) \mathrm{d}\omega \,.$$

Wir setzen $t = 0$ und führen die Substitution $x = \frac{\omega}{2}$ bei dem entstehenden Integral durch:

$$\frac{1}{2} = f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{(\frac{\omega}{2})} \right)^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \mathrm{d}x \,.$$

Hieraus erhalten wir schließlich die interessante Aussage:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \mathrm{d}x = \pi \,.$$

Aufgabe 5 (Differenzialgleichung) Gegeben sei ein dreifacher Tiefpass, der durch die Differentialgleichung

$$(\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1)^3 x(t) = s(t)$$

mit $\alpha = RC > 0$ und fouriertransformierbarer rechter Seite s (dem *Eingang*) beschrieben wird. Dabei bezeichne

$$(\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1)^3 x(t) = \alpha^3 \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} x(t) + 3\alpha^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) + 3\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) + x(t) \,.$$

Nun seien mit $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)$ sowie $s(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} S(\omega)$ die jeweiligen Fouriertransformierten gegeben.

5.1 Formulieren Sie die im Zeitbereich gegebene Differentialgleichung im Bildbereich.

5.2 Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion H sowie die Impulsantwort h.

5.3 Berechnen Sie die *Antwort* x für allgemeines s.

5.4 Berechnen Sie x für den Rechteckimpuls $s(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 1/2, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$.

Lösung: (.1) Mit $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)$, $s(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} S(\omega)$ führt die Anwendung der Fouriertransformation auf beiden Seiten der Gleichung auf die Darstellung

$$(\alpha i\omega + 1)^3 X(\omega) = S(\omega) \,. \qquad (*)$$

(.2) Auflösen von $(*)$ nach $X(\omega)$ führt auf die Übertragungsfunktion $H(\omega) = \frac{1}{(\alpha i\omega+1)^3}$. Deren inverse Fourier-Transformierte liefert die Impulsantwort h. Ein Blick in unsere Tabelle mit den Fouriertransformierten liefert

$$\frac{1}{2}t^2 e^{-at}\widetilde{u}(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad \frac{1}{(i\omega+a)^3},$$

mit der modifizierten Heaviside-Funktion $\widetilde{u}$. Die Übertragungsfunktion H kann man umformen zu $H(t) = \frac{1}{\alpha^3(i\omega+1/\alpha)^3}$. Damit ist

$$h(t) = \frac{1}{2\alpha^3}t^2 e^{-t/\alpha}\widetilde{u}(t)\,.$$

(.3) Die Faltung der Übertragungsfunktion h mit dem Eingang s liefert eine Lösung der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} x(t) &= h(t) * s(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)\,\frac{1}{2\alpha^3}\,\tau^2\,e^{-\tau/\alpha}\widetilde{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\alpha^3}\int_0^{\infty} s(t-\tau)\,\tau^2\,e^{-\tau/\alpha}\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

(.4) Es sei nun konkret s der oben angegebene Recheckimpuls. Der Integrand enthält also den *wandernden* Rechteckimpuls

$$s(t-\tau) = \begin{cases} 1, & |t-\tau| < 1 \\ 1/2, & |t-\tau| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} 1, & t-1 < \tau < t+1 \\ 1/2, & t-1 = \tau = t+1\,. \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt für das Integral

$$x(t) = \frac{1}{2\alpha^3}\int_{t-1}^{t+1} \tau^2\,e^{-\tau/\alpha}\widetilde{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Wegen der (modifizierten) Heaviside-Funktion $\widetilde{u}$ ist jetzt eine Fallunterscheidung nötig, abhängig davon, wo $1-t$ bzw. $1+t$ bzgl. der Null liegen:

- Falls $t+1 < 0$: $\quad x(t) = 0$.
- Falls $t-1 < 0 < t+1$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\alpha^3}\int_0^{t+1} \tau^2 e^{-\tau/\alpha}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2\alpha^2}\left[e^{-\tau/\alpha}(2\alpha^2+2\alpha\tau+\tau^2)\right]_0^{t+1} \\ &= 1 - \frac{e^{-(t+1)/\alpha}}{2\alpha^2}(2\alpha^2+2\alpha(t+1)+(t+1)^2)\,. \end{aligned}$$

- Falls $0 < t - 1$:

$$x(t) = \frac{1}{2\alpha^3}\int_{t-1}^{t+1} \tau^2 e^{-\tau/\alpha}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2\alpha^2}\left[e^{-\tau/\alpha}(2\alpha^2 + 2\alpha\tau + \tau^2)\right]_{t-1}^{t+1}$$
$$= \frac{e^{-t/\alpha}}{\alpha^2}\left(-2(\alpha + t)\cosh\left(1/\alpha\right) + (1 + 2\alpha^2 + 2\alpha t + t^2)\sinh\left(1/\alpha\right)\right).$$

Aufgabe 6 (Differentialgleichung) Es sei $\widetilde{u}(t) = u(t)$ für $t \neq 0$ mit $\widetilde{u}(0) = 1/2$, wobei u die Heaviside-Funktion ist. Man kann zeigen, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Zusammenhang

$$t^n e^{-t}\widetilde{u}(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad \frac{n!}{(1 + i\omega)^{n+1}}$$

zwischen Zeit- und Frequenzbereich gilt. Bestimmen Sie mittels Fouriertransformation jeweils eine Lösung der folgenden LTI-Systeme:

6.1 $\dot{x}(t) + x(t) = t^n e^{-t}\tilde{u}(t)$,

6.2 $\ddot{x}(t) - 2\,\dot{x}(t) + x(t) = s(t)$ mit stetigem und fouriertransformierbarem $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Lösung: Man beachte unser Rezept zur Lösung einer DGL mit Fouriertransformation: (.1) (1) Es sei $X(\omega)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$. Die Fouriertransformierte der Störfunktion ist in der Aufgabenstellung gegeben.

(2) Fouriertransformation der DGL führt auf die Gleichung $(i\omega + 1)X(\omega) = \frac{n!}{(i\omega+1)^{n+1}}$.

(3) Wir lösen nach $X(\omega)$ auf: $X(\omega) = \frac{1}{(i\omega+1)}\frac{n!}{(i\omega+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(i\omega+1)^{n+2}}$.

(4), (5) Hier bietet sich an, direkt die Rücktransformierte von $X(\omega)$ zu bestimmen, es ist nämlich der zweite Faktor der rechten Seite nach der angegebenen Korrespondenz die Fouriertransformierte von $t^{n+1}e^{-t}\tilde{u}(t)$. Deshalb gilt wegen der Linearität der Fouriertransformation

$$x(t) = \frac{1}{n+1}t^{n+1}e^{-t}\tilde{u}(t)$$

die inverse Fouriertransformierte von $X(\omega)$ und damit die gesuchte Lösung des LTI-Systems.

(.2) (1) Es sei wieder $X(\omega)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, und $S(\omega)$ bezeichne die Fouriertransformierte von $s(t)$.

(2) Die Fouriertransformation der DGL liefert die Gleichung $(1 - i\omega)^2 X(\omega) = S(\omega)$.

(3) Wir lösen nach X auf: $X(\omega) = \frac{1}{(1-i\omega)^2}\,S(\omega)$.

(4) Die Übertragungsfunktion lautet

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 - i\omega)^2} = \frac{1}{\big(1 + i(-\omega)\big)^2}.$$

Deren inverse Fouriertransformierte ist die *Impulsantwort* und lautet nach der angegebenen Korrespondenz und wegen $S(-\omega) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad s(-t)$:

$$h(t) = -t\, e^t \tilde{u}(-t) = \begin{cases} -t\, e^t, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}.$$

(5) Eine Lösung des LTI-Systems ergibt sich nun aus der Faltung von h mit der rechten Seite s:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, s(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = -\int_{-\infty}^{0} \tau\, e^\tau s(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$