Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Fouriertransformation

Autor: Benjamin Rüth
Stand: 20. März 2014

Aufgabe 1 (Faltung) Es sei $f(t) = e^{-|t|}$.

1.1 Man berechne die Faltung $(f * f)(t)$. *(Tipp: Fallunterscheidung* $t \geq 0$ *und* $t < 0$*.)*

1.2 Man berechne die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f(t))(\omega)$.

1.3 Unter Zuhilfenahme der Faltung bestimme man $\mathcal{F}(|t|e^{-|t|})(\omega)$.

Aufgabe 2 (Faltung,schwer!) Es sei s mit $s(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $x \in [0, 2\pi)$ eine 2π-periodische Sägezahnfunktion.

2.1 Zeigen Sie, dass die Faltung $(s * s)(x)$ wieder eine 2π-periodische Funktion ergibt.

2.2 Berechnen Sie die periodische Faltung $(s * s)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(x-t)s(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in \mathbb{R}$ direkt.

2.3 Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten c_k der Funktion $s * s$ durch direkte Rechnung.

Aufgabe 3 (Fouriertransformation) Für $\lambda > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ sei $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 0 \\ \exp((-\lambda + ia)t) & , \quad t > 0 \end{cases}$.

3.1 Man berechne die Fouriertransformierte von $f(t)$.

3.2 Wie lauten die Fouriertransformierten der *gedämpften Schwingungen*

$$x(t) = e^{-\lambda t} \cos Nt \quad \text{und} \quad y(t) = e^{-\lambda t} \sin Nt\,,\ N \in \mathbb{N}\,,\ t > 0?$$

Aufgabe 4 (Fouriertransformation) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - |t|) & , \quad |t| \leq 1 \\ 0 & , \quad |t| > 1 \end{cases}$$

und bestätigen Sie mithilfe der Rücktransformation $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi$.

Aufgabe 5 (Differenzialgleichung) Gegeben sei ein dreifacher Tiefpass, der durch die Differentialgleichung

$$(\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1)^3 x(t) = s(t)$$

mit $\alpha = RC > 0$ und fouriertransformierbarer rechter Seite s (dem *Eingang*) beschrieben wird. Dabei bezeichne

$$(\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1)^3 x(t) = \alpha^3 \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} x(t) + 3\alpha^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) + 3\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) + x(t)\,.$$

Nun seien mit $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)$ sowie $s(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} S(\omega)$ die jeweiligen Fouriertransformierten gegeben.

5.1 Formulieren Sie die im Zeitbereich gegebene Differentialgleichung im Bildbereich.

5.2 Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion H sowie die Impulsantwort h.

5.3 Berechnen Sie die *Antwort* x für allgemeines s.

5.4 Berechnen Sie x für den Rechteckimpuls $s(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 1/2, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$

Aufgabe 6 (Differentialgleichung) Es sei $\widetilde{u}(t) = u(t)$ für $t \neq 0$ mit $\widetilde{u}(0) = 1/2$, wobei u die Heaviside-Funktion ist. Man kann zeigen, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Zusammenhang

$$t^n e^{-t} \widetilde{u}(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(1 + i\omega)^{n+1}}$$

zwischen Zeit- und Frequenzbereich gilt. Bestimmen Sie mittels Fouriertransformation jeweils eine Lösung der folgenden LTI-Systeme:

6.1 $\dot{x}(t) + x(t) = t^n e^{-t} \widetilde{u}(t)$,

6.2 $\ddot{x}(t) - 2\,\dot{x}(t) + x(t) = s(t)$ mit stetigem und fouriertransformierbarem $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.