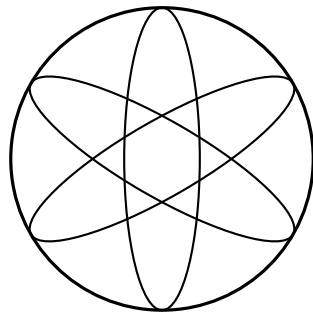


# Ferienkurs Analysis 3 für Physiker



Übung: Fouriertransformation

Autor: Benjamin Rüth  
Stand: 20. März 2014

---

**Aufgabe 1** (Faltung) Es sei  $f(t) = e^{-|t|}$ .

**1.1** Man berechne die Faltung  $(f * f)(t)$ . (*Tipps: Fallunterscheidung  $t \geq 0$  und  $t < 0$ .*)

**1.2** Man berechne die Fouriertransformierte  $\mathcal{F}(f(t))(\omega)$ .

**1.3** Unter Zuhilfenahme der Faltung bestimme man  $\mathcal{F}(|t|e^{-|t|})(\omega)$ .

**Aufgabe 2** (Faltung, schwer!) Es sei  $s$  mit  $s(x) = \frac{\pi-x}{2}$  für  $x \in [0, 2\pi)$  eine  $2\pi$ -periodische Sägezahnfunktion.

**2.1** Zeigen Sie, dass die Faltung  $(s * s)(x)$  wieder eine  $2\pi$ -periodische Funktion ergibt.

**2.2** Berechnen Sie die periodische Faltung  $(s * s)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(x-t)s(t) dt$  für  $x \in \mathbb{R}$  direkt.

**2.3** Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten  $c_k$  der Funktion  $s*s$  durch direkte Rechnung.

**Aufgabe 3** (Fouriertransformation) Für  $\lambda > 0$  und  $a \in \mathbb{R}$  sei  $f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{1}{2} & , t = 0 \\ \exp((-\lambda + ia)t) & , t > 0 \end{cases}$ .

**3.1** Man berechne die Fouriertransformierte von  $f(t)$ .

**3.2** Wie lauten die Fouriertransformierten der *gedämpften Schwingungen*

$$x(t) = e^{-\lambda t} \cos Nt \quad \text{und} \quad y(t) = e^{-\lambda t} \sin Nt, \quad N \in \mathbb{N}, \quad t > 0?$$

**Aufgabe 4** (Fouriertransformation) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - |t|) & , |t| \leq 1 \\ 0 & , |t| > 1 \end{cases}$$

und bestätigen Sie mithilfe der Rücktransformation  $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi$ .

**Aufgabe 5** (Differentialgleichung) Gegeben sei ein dreifacher Tiefpass, der durch die Differentialgleichung

$$\left(\alpha \frac{d}{dt} + 1\right)^3 x(t) = s(t)$$

mit  $\alpha = RC > 0$  und fouriertransformierbarer rechter Seite  $s$  (dem *Eingang*) beschrieben wird. Dabei bezeichne

$$\left(\alpha \frac{d}{dt} + 1\right)^3 x(t) = \alpha^3 \frac{d^3}{dt^3} x(t) + 3\alpha^2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 3\alpha \frac{d}{dt} x(t) + x(t).$$

---

Nun seien mit  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$  sowie  $s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(\omega)$  die jeweiligen Fouriertransformierten gegeben.

**5.1** Formulieren Sie die im Zeitbereich gegebene Differentialgleichung im Bildbereich.

**5.2** Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion  $H$  sowie die Impulsantwort  $h$ .

**5.3** Berechnen Sie die *Antwort*  $x$  für allgemeines  $s$ .

**5.4** Berechnen Sie  $x$  für den Rechteckimpuls  $s(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 1/2, & |t| = 1. \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ .

**Aufgabe 6** (Differentialgleichung) Es sei  $\tilde{u}(t) = u(t)$  für  $t \neq 0$  mit  $\tilde{u}(0) = 1/2$ , wobei  $u$  die Heaviside-Funktion ist. Man kann zeigen, dass dann für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  der Zusammenhang

$$t^n e^{-t} \tilde{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{n!}{(1 + i\omega)^{n+1}}$$

zwischen Zeit- und Frequenzbereich gilt. Bestimmen Sie mittels Fouriertransformation jeweils eine Lösung der folgenden LTI-Systeme:

**6.1**  $\dot{x}(t) + x(t) = t^n e^{-t} \tilde{u}(t)$ ,

**6.2**  $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = s(t)$  mit stetigem und fouriertransformierbarem  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .