Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Laurentreihen und Residuensatz

Autor: Benjamin Rüth

Stand: 20. März 2014

Liebe Kursteilnehmer, bitte bringt auch das Arbeitsblatt unter **Zusatzmaterial** ausgedruckt mit in die Übung.

Aufgabe 1 (Laurentreihe) Entwickeln Sie die Funktion

$$\frac{-z^2 - z + 4}{z^3 - 3z^2 - z + 3}$$

in Laurentreihen. Wie viele solcher Reihen gibt es und in welchen Gebieten sind sie jeweils gültig? Bestimmen Sie für jeden Fall die Koeffizienten der Reihe.Bestimmen Sie ferner die Residuen der Funktion in den Polen.

Lösung: Um die Funktion besser untersuchen zu können führen wir zuerst eine Partialbruchzerlegung durch und erhalten

$$\frac{-z^2 - z + 4}{z^3 - 3z^2 - z + 3} = \frac{1}{2(1-z)} + \frac{1}{2(1+z)} + \frac{1}{3-z}$$

Die drei Summanden können wir nun unabhängig voneinander betrachten.

- erster Summand
  - für $|z| < 1$

    $$\frac{1}{2(1-z)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

    Daraus folgt für die Koeffizienten $a_n = 1$, wenn $n \geq 0$, sonst $a_n = 0$.
  - für $|z| > 1$

    $$\frac{1}{2(1-z)} = \frac{1}{-2z\left(1 - \frac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2}z^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2}z^{-n}$$

    Daraus folgt für die Koeffizienten $a_{-n} = -\frac{1}{2}$, wenn $n > 10$, sonst $a_n = 0$.
- zweiter Summand
  - für $|z| < 1$

    $$\frac{1}{2(1+z)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z)^n$$

    Daraus folgt für die Koeffizienten $a_n = (-1)^n$, wenn $n \geq 0$, sonst $a_n = 0$.

– für $|z| > 1$

$$\frac{1}{2(1+z)} = \frac{1}{2z(1+\frac{1}{z})} = \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}z^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2}z^{-n}$$

Daraus folgt für die Koeffizienten $a_{-n} = -\frac{(-1)^{n-1}}{2}$, wenn $n > 0$, sonst $a_n = 0$.

- dritter Summand

– für $|z| < 3$

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n$$

Daraus folgt für die Koeffizienten $a_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$, wenn $n \geq 0$, sonst $a_n = 0$.

– für $|z| > 3$

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{-z\left(1-\frac{3}{z}\right)} = \frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}-3^n z^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}-3^n z^n$$

Daraus folgt für die Koeffizienten $a_{-n} = -3^n$, wenn $n > 0$, sonst $a_n = 0$.

Die einzelnen Summanden können wir jetzt wieder zusammenfügen und wir erhalten die Laurentreihe der Funktion:

- für $|z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)z^n$$

- für $1 < |z| < 3$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^{n-1}}{2}z^{-n}$$

- für $3 < |z|$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1+(-1)^{n-1}}{2} - 3^n\right)z^n$$

Aufgabe 2 (Residuensatz) Berechnen Sie die folgenden Integrale für $\gamma(\phi) = \frac{2}{3}e^{i\phi} + \frac{1}{2},\ \phi \in [0; 2\pi]$.

2.1

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$$

2.2

$$\int_\gamma \cot \pi z \mathrm{d}z$$

2.3

$$\int_\gamma \frac{1}{z \sin \pi z} \mathrm{d}z$$

Lösung:
(.1)Wir verwenden für beide Residuen die Formel 1 aus der Vorlesung:

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big((z - z_0)^k f(z) \Big)$$

und erhalten

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(f(z)\right) = -1$$
$$\mathrm{Res}_{z=1}\left(f(z)\right) = e - 1$$

mit dem Residuensatz ergibt sich der Wert des Integrals zu $2\pi i(e-2)$.

(.2)Wir verwenden für beide Residuen die Formel 2 aus der Vorlesung:

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{g(z)}{h(z)}\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Dazu formen wir f um:

$$f(z) = \cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

Es gilt $h'(z) = \cos(\pi z)\pi$. Daraus folgt für die Residuen in den Polen von f

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(f(z)\right) = \frac{\cos(\pi 0)}{\cos(\pi 0)\pi} = \frac{1}{\pi}$$
$$\mathrm{Res}_{z=1}\left(f(z)\right) = \frac{\cos(\pi 0)}{\cos(\pi 0)\pi} = \frac{1}{\pi}$$

mit dem Residuensatz ergibt sich der Wert des Integrals zu $4i$.

(.3)Wir verwenden für das Residuum um $z = 1$ die Formel 2 und für das Residuum um $z = 0$ die Formel 1. Das Residuum um $z = 0$ können wir erst durch zweimalige Anwendung von L'Hospital auf den Grenzwert angeben. Es ergibt sich:

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(f(z)\right) = 0$$
$$\mathrm{Res}_{z=1}\left(f(z)\right) = -\frac{1}{\pi}$$

mit dem Residuensatz ergibt sich der Wert des Integrals zu $-2i$.