Musterlösung Analysis 3 - Flächenintegrale und Funktionentheorie 1

12. März 2012

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(i) Berechne $\oint_\gamma z\mathrm{dz}$ mit $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ durch explizites Ausrechnen des Kurvenintegrals. Gehts auch einfacher?

Lösung:

$$\oint\limits_\gamma z\mathrm{dz} = ir^2 \int\limits_0^{2\pi} e^{2it}\mathrm{dt} = 0$$

oder Cauchyscher Integralsatz weil $f(z) = z$ holomorph ists.

(ii) Berechne das Kurvenintegral $\oint_\gamma \bar{z}\mathrm{dz}$ mit $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Ist die Funktion $f(z) = \bar{z}$ holomorph?

Lösung:

$$\oint\limits_\gamma \bar{z}\mathrm{dz} = ir^2 \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{dt} = 2\pi ir^2$$

Nein!

(iii) Berechne das Kurvenintegral $\oint_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{dz}$ mit $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Ist die Funktion $f(z) = \bar{z}$ holomorph?

Lösung:

$$\oint\limits_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{dz} = \oint\limits_\gamma \frac{\bar{z}}{|z|^2}\mathrm{dz} = \frac{1}{r^2}\oint\limits_\gamma \bar{z}\mathrm{dz} = 2\pi i$$

Nein!

(iv) Berechne das Kruvenintegral $\oint_\gamma (z - z_0)^n\mathrm{dz}$ mit einer gegneten Parametrisierung.

Lösung: Wähle $\gamma(t) = z_0 + e^{it}$ dann gilt:

$$\oint\limits_\gamma (z - z_0)^n\mathrm{dz} = \begin{cases} 2\pi i \text{ , für } n = -1 \\ 0 \text{ , sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Flächeninhalte

(i) Zeige das für die Parametrisierung

$$\Gamma : [a, b] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3;\ (z, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} r(z)\cos(\phi) \\ r(z)\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

die Formel

$$|\Gamma| = 2\pi \int\limits_a^b \sqrt{1+(r'(z))^2}r(z)\mathrm{dz}$$

für den Flächeninhalt von Γ gilt.

Lösung: Mit

$$D\Gamma = \begin{pmatrix} r'(z)\cos(\phi) & -r(z)\sin(\phi) \\ r'(z)\sin(\phi) & -r(z)\cos(\phi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Formel

$$|\Gamma| = \int\limits_U (\det(D\Gamma^t D\Gamma))^{1/2}(x)\ \mathrm{d}^m\mathrm{x}$$

ergibt sich das Gewünschte.

(ii) Parametrisiere die Fläche

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2, z = 2+x^2+y^2\}$$

und berechne den Flächeninhalt.

Lösung:

$$\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \Gamma(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin(\varphi) \\ 2+r^2 \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$D\Gamma = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin\varphi & r\cos(\varphi) \\ 2r & 0 \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich

$$|\Gamma| = \int\limits_U (D\Gamma^t D\Gamma)^{1/2}(x)\ \mathrm{d}^m\mathrm{x} = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1}\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{dr} = \frac{\pi}{6}(4R^2+1)^{3/2}$$

Aufgabe 3: Holomorphie

(i) Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann nennt man h harmonisch, wenn $\Delta h = 0$ gilt. Zeige nun:

(a) Sei $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt $Re(u)$ und $Im(U)$ sind harmonisch.

Lösung: Einfach die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen für $Re(u)$ und $Im(U)$ anwenden:

$$\Delta Re(u)(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}Re(u) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}Re(u) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}Im(u) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}Im(u) = 0$$

und genauso für den Imaginärteil.

(b) Sei h eine harmonische Funktion, dann ist h der Realteil einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion. Ist der Imaginärteil dieser Funktion eindeutig bestimmt?

Lösung: Eine solche holomorphe Funktion sei $\mathrm{u} = \mathrm{h} + \mathrm{i}\ \mathrm{g}$ und wegen der geforderten Holomorphie von u gibt

$$\partial_x g = -\partial_y h$$
$$\partial_y g = \partial_x h$$

Zu zeigen ist, ob eine solche Funktion g existiert.

Wir betrachten hierfür das Vektorfeld $f = (\partial_x g, \partial_y g)$ und merken an, dass dieses die Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

$$\partial_x f_2 = \partial_x \partial_y g = \partial_x \partial_x h = -\partial_y \partial_y h = \partial_y \partial_x g = \partial_y f_1$$

wobei $\Delta h = 0$ verwendet wurde. Daher existiert die Funktion g und ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

(ii) Sei $f : U \to \mathbb{X}$ und U einfach zusammenhängend. Zeige, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind.

(a) f besitzt eine Stammfunktion.

(b) f ist stetig und es gilt $\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$ für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve in U

(c) f ist stetig und $\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ hängt nur von den Anfangs- und Endwerten von γ ab.

Zeige, dann das all diese Eigenschaften äquivalent dazu sind, dass f holomorph ist.

Lösung: (a) $\Leftrightarrow$ (c): Weil

$$F(z) := \int_a^z f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t$$

die Stammfunktion ist folgt

$$\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

. Für die Umkehrung zeigt man, dass gilt

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)|$$

(c) $\Leftrightarrow$ (b): Man schließe einfach die Endpunkte von γ und für die Umkehrung nimmt man an, dass die Aussage nicht gelten würde. Dann wäre dies ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(b) $\to$ f holomorph: Definition von Holomorphie und Stammfunktion. (b) $\leftarrow$ f holomorph: Cauchysche Integralsatz

(iii) Zeige, ob die reellwertige Funktion $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}, \varphi(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ Realteil einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist.

Lösung: Da φ harmonisch ist, folgt die Behauptung aus der oben gezeigten Behauptung (3.i.b).

Aufgabe 4: Kurvenintegrale und der Cauchysche Integralsatz

(i) Sei $0 < r < R$ und f die Funktion

$$\begin{aligned} f : U_R^*(0) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{R+z}{(R-z)z} \end{aligned}$$

Man zeige $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{R-z}$ und durch Integration über $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \alpha(t) = r\exp(it)$, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos t + r^2} \mathrm{d}t = 1$$

gilt.

Lösung: Die Zerlegung von f erhält man durch Partialbruchzerlegung. Dann sieht man

$$\int_\alpha (\frac{1}{z} + \frac{1}{R-z})\mathrm{dz} = \int_\alpha \frac{1}{z}\mathrm{dz} = 2\pi i$$

und andererseits indem man Nenner und Zähler mit $R - \bar{z}$ erweitert

$$\int_\alpha \frac{(R+z)(R-\bar{z})}{(R^2 - R(z+\bar{z}) + |z|^2)z}\mathrm{dz} = i\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - 2irR\sin t - r^2}{R^2 - 2Rr\cos t + r^2}\mathrm{dt}$$

Nimmt man jetzt auf beiden Seiten den Imaginärteil, dann erhält man das gewünscht Ergebnis.

(ii) Berechne die Integtrale

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\mathrm{dt} = \int_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{dt} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

Hinweis: Benutze die Funktion $f(z) = \exp(iz^2)$ und vergleiche die positive reelle Achse mit der Winkelhalbierenden. Benutze $\int_0^\infty \exp(-t^2)\mathrm{dt}$.

Lösung: Wir verwenden die Parametrisierung

$$\gamma_1(t) = t,\ t \in [0,r]$$
$$\gamma_2(t) = r + it,\ t \in [0,r]$$
$$\gamma_3(t) = (1+i)t,\ t \in [0,r]$$

Da nun f eine holomorphe Funktion ist gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{dz} = \int_0^r \exp(it^2)\mathrm{dt} + i\int_0^r \exp i(r^2 - t^2)\exp -2rt\mathrm{dt} - (1+i)\int_0^r \exp(-2t^2)\mathrm{dt}$$

Da zweite Integral nach der Standardabschätzung durch $\exp -2r^2$ majorisiert wird, verschwindet es für $r \to \infty$. Damit verbleiben wir:

$$\int_0^\infty \exp(it^2)\mathrm{dt} = (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

(iii) Berechne die Folgenden Integrale mit Hilfe des Chauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel und

$$\alpha_{a;r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \alpha_{a,r} = a + re^{it}$$

mit $r > 0$.

(a)

$$\int_{\alpha_{2;1}} \frac{z^7}{z^2(z^4+1)}\mathrm{dz}$$

Lösung:

$$\int_{\alpha_{2;1}} \frac{z^7}{z^2(z^4+1)}\mathrm{dz} = 0$$

weil die Funktion holomorph im entsprechenden Gebiet ist.

(b)

$$\int_{\alpha_{0;3}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\mathrm{dz}$$

Lösung: Mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$$

kommt man zu

$$\int_{\alpha_{0;3}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\mathrm{dz} = -\frac{1}{2}\int_{\alpha_{0;3}} \frac{\cos(\pi z)}{z+1}\mathrm{dz} + \frac{1}{2}\int_{\alpha_{0;3}} \frac{\cos(\pi z)}{z-1}\mathrm{dz} = 2\pi i(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\cos(\pi) = 0$$

mit Hilfe der Integralformel.

(c)

$$\int_{\alpha_{0;r}} \frac{\sin(z)}{z-b}\mathrm{dz}\ ,\ b \in \mathbb{C}\ ,\ |b| \neq r$$

Lösung:

$$\int_{\alpha_{0;r}} \frac{\sin(z)}{z-b}\mathrm{dz} = \begin{cases} 0 & ,\ \text{für } r < |b| \\ 2\pi i \sin(b) & ,\ \text{für } r > |b| \end{cases}$$

(d)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_{i;1}} \frac{e^z}{z^2+1}\mathrm{dz}$$

Lösung:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_{i;1}} \frac{e^z}{(z+i)(z-i)}\mathrm{dz} = \frac{e^i}{2i}$$

mit Integralform.

(e)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_{1+2i;5}} \frac{4z}{z^2+9}\mathrm{dz}$$

Lösung:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_{1+2i;5}} \frac{4z}{z^2+9}\mathrm{dz} = 2$$

(f)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_{0;3}} \frac{e^z}{z^2+1}\mathrm{dz}$$

Lösung: Mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i}$$

ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_{0;3}} \frac{e^z}{z^2+1}\mathrm{dz} = \frac{i}{2}\left(e^{-i} - e^{i}\right)$$

(g)

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{1;1}} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \mathrm{dz}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

Lösung: Mit der Cauchyschen Integralformel für die $n-1$-Ableitung und $f^{(n-1)}(1) = (n-1)!$ ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{1;1}} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \mathrm{dz} = 2\pi i n$$