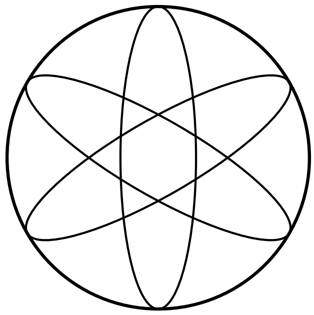
Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker



Übung: Holomorphe Funktionen und wichtige Sätze der Funktionentheorie

Autor: Benjamin Rüth

Stand: 18. März 2014

Aufgabe 1 (Rechnen) Man berechne:

1.1

$$e^{2+\frac{i\pi}{6}}$$

1.2

$$\cosh(it)\, t \in \mathbb{R}$$

1.3

$$\sinh(it)\, t \in \mathbb{R}$$

1.4

$$\cos(1+2i)$$

1.5

$$\Re(z) \text{ ohne Verwendung von } \Re(\ )$$

1.6

$$\Im(z) \text{ ohne Verwendung von } \Im(\ )$$

Lösung: (.1)Es gilt

$$e^{2+i\frac{\pi}{6}} = e^2 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}e^2 + i\frac{1}{2}e^2$$

(.2)Es gilt

$$\cosh(it) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \cos(t)$$

(.3)Es gilt

$$\sinh(it) = \frac{1}{2}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \sin(t)$$

(.4)Die Additionstheoreme der sin- und cos-Funktionen gelten auch für komplexe Argumente. Somit gilt

$$\cos(1+2i) = \cos(1)\cos(2i) - \sin(1)\sin(2i) = \cos(1)\cosh(2) - i\sin(1)\sinh(2)$$

(.5)

$$\frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

(.6)

$$\frac{1}{2}(z-\bar{z})$$

Aufgabe 2 (Holomorphe Funktionen) Gegeben sind die Funktionen

$$f(z) = \bar{z} \text{ und } g(z) = z^2$$

Diese beiden Funktionen sind auf Holomorphie zu untersuchen. Geben Sie ferner jeweils ein passendes Wegintegral (mit Parametrisierung des verwendeten Weges!) welches die Holomorphie der Funktion belegt oder widerlegt. Kann man für holomorphe Funktionen zeigen, dass das Wegintegral für **alle** geschlossenen Wege verschwindet?

Lösung: Um die Holomorphie der gegebenen Funktionen zu untersuchen verwenden wir die Cauchy-Riemannschen DG:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Wir beginnen mit f. Dazu müssen wir die Funktion entsprechend umformen:

$$f(z) = \bar{z} \leftrightarrow f(x+iy) = x - iy$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x \quad \tfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v(x,y) &= -y \quad \tfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen DG sind nicht erfüllt, da $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$. Wir verwenden den Weg $\gamma_1(t) = e^{2\pi i t}$ mit $t \in [0;1]$ um zu zeigen, dass f nicht holomorph ist, da das Integral über f für geschlossene Wege nicht null wird.

$$\int_\gamma \bar{z} \mathrm{d}z = \int_0^1 e^{-2\pi i t} 2\pi i e^{2\pi i t} \mathrm{d}t = \int_0^1 i\pi \mathrm{d}t = 2\pi i$$

Für g gehen wir identisch vor.

$$g(z) = z^2 \leftrightarrow g(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2 \quad \tfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ v(x,y) &= 2xy \quad \tfrac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen DG sind erfüllt. Für den Weg γ aus der ersten Teilaufgabe erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z &= \int_0^1 e^{4\pi it} 2\pi i e^{2\pi it} \mathrm{d}t = 2\pi i \int_0^1 e^{6\pi it} \mathrm{d}t \\ &= 2\pi i \int_0^1 \cos(6\pi t) + i\sin(6\pi t) \mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

Für g existiert eine Stammfunktion $G(z) = \frac{1}{3}z^3$. Das Integral lässt sich also schreiben als

$$\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) = 0$$

weil $\gamma(1) = \gamma(0)$, da es sich um einen geschlossenen Weg handelt.

Aufgabe 3 (Holomorphe Funktionen) Stellen Sie fest, in welchen Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen holomorph sind:

3.1

$$f(z) = z^3$$

3.2

$$f(z) = z\Re(z)$$

3.3

$$f(z) = |z|^2$$

3.4

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Lösung: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ist in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn u und v in G stetig partiell differenzierbar nach x und y sind und die Cauchy Riemannschen DGL gelten.

(.1) Es gilt

$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right),$$

also $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ und $v(x,y) = 3x^2y - y^3$. u und v sind in $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. Die Cauchy Riemannschen DGL

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -6xy = -v_x$$

sind erfüllt. Somit ist $f(z)$ in $\mathbb{C}$ holomorph. (.2) Es gilt

$$z\,\Re z = (x+iy)x = x^2 + i\,xy\,,$$

also $u(x,y) = x^2$ und $v(x,y) = xy$. u und v sind in $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. Weiter gilt

$$\begin{array}{llll} u_x = 2x, & v_y = x & \text{und} & u_x = v_y \quad \text{nur für } x = 0, \\ u_y = 0, & v_x = y & \text{und} & u_y = -v_x \quad \text{nur für } y = 0, \end{array}$$

$f(z)$ ist also nirgends holomorph.

(.3) Für $f(z)$ gilt

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u(x,y)\,, \qquad v(x,y) = 0\,.$$

Für die partiellen Ableitungen erhält man

$$\begin{array}{llll} u_x = 2x, & v_y = 0 & \text{und} & u_x = v_y \quad \text{nur für } x = 0, \\ u_y = 2y, & v_x = 0 & \text{und} & u_y = -v_x \quad \text{nur für } y = 0. \end{array}$$

Die Cauchy Riemannschen DGL gelten also nur für $x = y = 0$, und somit gibt es kein Gebiet, in dem $f(z)$ holomorph ist.

(.4) Für $f(z)$ gilt

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}\,,$$

also $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$. Für die partiellen Ableitungen erhält man

$$\begin{array}{llll} u_x = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, & v_y = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{und} & u_x = v_y \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ u_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, & v_x = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{und} & u_y = -v_x \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0). \end{array}$$

Die Cauchy-Riemann'schen DGLen sind erfüllt und $f(z)$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4 (Integral) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma 2ze^{z^2}\,dz$$

für den Weg, welcher 0 und $1+i$ entlang der Parabel $y = x^2$ verbindet.

Lösung: Scharfes Hinsehen zeigt, dass der Integrand $f(z) = 2ze^{z^2}$ in $\mathbb{C}$ die Stammfunktion $F(z) = e^{z^2}$ besitzt. Der Integralwert hängt also nur von den Endpunkten 0 und $1+i$ ab und es gilt

$$\int\limits_\gamma 2ze^{z^2}\mathrm{d}z = F(1+i) - F(0) = e^{(1+i)^2} - e^0 = e^{2i} - 1$$

Aufgabe 5 (Integral) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

5.1

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\, dz$$

5.2

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(2i-z)(z-i/2)}$$

Lösung:
Wir verwenden jeweils die Cauchy'sche Integralformel:
(.1)

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\, dz = 2\pi i \sin(-i) = 2\pi i \frac{1}{2i}\left(e^{(i)(-i)} - e^{(-i)(-i)}\right) = 2\pi \frac{1}{2}\left(e^{1} - e^{-1}\right) = 2\pi \sinh(1)$$

(.2)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(2i-z)(z-i/2)} = 2\pi i \frac{1}{2i - i/2} = \frac{4}{3}\pi$$