Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Holomorphe Funktionen und wichtige Sätze der Funktionentheorie

Autor: Benjamin Rüth

Stand: 18. März 2014

Aufgabe 1 (Rechnen) Man berechne:

1.1
$$e^{2+\frac{i\pi}{6}}$$

1.2
$$\cosh(it)\, t \in \mathbb{R}$$

1.3
$$\sinh(it)\, t \in \mathbb{R}$$

1.4
$$\cos(1+2i)$$

1.5
$$\Re(z) \text{ ohne Verwendung von } \Re(\ )$$

1.6
$$\Im(z) \text{ ohne Verwendung von } \Im(\ )$$

Aufgabe 2 (Holomorphe Funktionen) Gegeben sind die Funktionen

$$f(z) = \bar{z} \text{ und } g(z) = z^2$$

Diese beiden Funktionen sind auf Holomorphie zu untersuchen. Geben Sie ferner jeweils ein passendes Wegintegral (mit Parametrisierung des verwendeten Weges!) welches die Holomorphie der Funktion belegt oder widerlegt. Kann man für holomorphe Funktionen zeigen, dass das Wegintegral für **alle** geschlossenen Wege verschwindet?

Aufgabe 3 (Holomorphe Funktionen) Stellen Sie fest, in welchen Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen holomorph sind:

3.1
$$f(z) = z^3$$

3.2
$$f(z) = z\Re(z)$$

3.3
$$f(z) = |z|^2$$

3.4
$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Aufgabe 4 (Integral) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma 2ze^{z^2}\, dz$$

für den Weg, welcher 0 und $1+i$ entlang der Parabel $y = x^2$ verbindet.

Aufgabe 5 (Integral) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

5.1

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\, dz$$

5.2

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(2i-z)(z-i/2)}$$