Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Integralsätze

Autor: Benjamin Rüth

Stand: 17. März 2014

Aufgabe 1 (Torus) Zu festem $R > 0$ werden mittels

$$T : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \varrho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + \varrho \cos \vartheta) \cos \varphi \\ (R + \varrho \cos \vartheta) \sin \varphi \\ \varrho \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

Toruskoordinaten eingeführt. Bestimmen Sie

1.1 den Oberflächeninhalt des Torus $T_R^r := T([0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ mit $r \in [0, R]$,

1.2 den Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = x$, durch die Oberfläche von T_R^r direkt,

1.3 den Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = x$, durch die Oberfläche von T_R^r mit Hilfe des **Satzes von Gauß**.

Aufgabe 2 (Gauss) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{\partial W} \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2+z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{d}\sigma \,,$$

wobei W der Einheitswürfel mit den Ecken in $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ und $(1, 1, 1)$.

Aufgabe 3 (Gauß) Man bestätige den Satz von Gauß in der Ebene für die Funktion $u(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}$:

$$\iint_B \Delta u \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial B} \langle \nabla u, n \rangle \,\mathrm{d}s \,,$$

wobei B eine Kreisscheibe vom Radius R sei.

Aufgabe 4 (Gauss) Man berechne mit Hilfe des Divergenzsatzes von Gauß das Flächenintegral

$$\iint_\phi \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 - x \\ -xy \\ 3z \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Oberfläche des Gebietes B ist, welches durch die Fläche $z = 4 - y^2$ und die drei Ebenen $x = 0$, $x = 3$, $z = 0$ begrenzt ist.

Aufgabe 5 (Satz von Green) Zeigen Sie, dass der ebene Satz von Green ein Spezialfall des Satzes von Stokes ist.

Aufgabe 6 (Satz von Green) Man verifiziere für das Vektorfeld $\mathbf{v}(x,y) = (2xy - x^2, x + y^2)^\top$ und das Gebiet B, das durch $y = x^2$ und $y^2 = x$ begrenzt wird, den Satz von Green.

Aufgabe 7 (Satz von Stokes) Verifizieren Sie den **Satz von Stokes** für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, x_2, x_2x_3)^T$ auf dem Stück des Kegelmantels $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, das zwischen den Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 = 1$ liegt. Worauf ist bei der Parametrisierung der Randkurve des Kegelmantelstücks zu achten?

Aufgabe 8 (Satz von Stokes) Man bestätige den Satz von Stokes

$$\iint_\phi \mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s = \oint_{\partial\phi} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Fläche des Paraboloids $2z = x^2 + y^2$ mit negativer z-Komponente des Flächennormalenvektors darstellt, welches durch die Ebene $z = 2$ mit dem Rand $\partial\phi$ begrenzt ist.

Aufgabe 9 (Satz von Stokes) Gegeben sind das Vektorfeld $\mathbf{v}$ und die Fläche ϕ

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \ \varphi \in [0, 2\pi], \ \vartheta \in [0, \tfrac{\pi}{4}].$$

Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes das das Flächenintegral $\iint_\phi \mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s$.

Aufgabe 10 (Maxwell) Leiten Sie mithilfe der Integralsätze aus der folgenden differentiellen Form der **Maxwell-Gleichungen** die integrale Darstellung her:

- $\mathrm{rot}(H) - \dot{D} = j$,
- $\mathrm{rot}(E) + \dot{B} = 0$,
- $\mathrm{div}(D) = \rho$,
- $\mathrm{div}(B) = 0$.