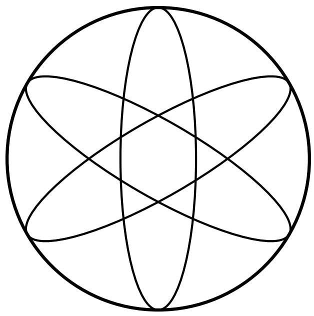
Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker



Übung: Integration im $\mathbb{R}^n$

Autor: Benjamin Rüth

Stand: 17. März 2014

Aufgabe 1 (Zylinder) Gegeben sei der Zylinder Z der Höhe $h > 0$ über dem in der x-y-Ebene gelegenen Kreis mit Radius $R > 0$ um den Ursprung.

1.1 Beschreiben Sie den Zylindermantel von Z in geeigneten Koordinaten.

1.2 Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds $\mathbf{v}$ durch die Mantelfläche von Z von innen nach außen, wobei

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z)^\top \mapsto (xz + y, yz - x, z)^T .$$

Aufgabe 2 (Schraubenfläche) Man berechne den Flächeninhalt der Schraubenfläche

$$\phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \qquad r \in [0, 1], \ \varphi \in [0, 2\pi] .$$

Aufgabe 3 (Schnitt zweier Zylinder) Man berechne den Flächeninhalt der Oberfläche des Schnitts der beiden Zylinder $x^2 + z^2 \leq a^2$ und $y^2 + z^2 \leq a^2$. Fertige eine Skizze an und nutze die Symmetrie des Problems aus!

Aufgabe 4 (Integral) Seien D das Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ sowie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ mit $a > 0$. Man berechne:

4.1 $\iint_D e^{-x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

4.2 $\iint_K e^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Aufgabe 5 (Integral) Gegeben ist das Doppelintegral

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

5.1 Skizzieren Sie das Integrationsgebiet.

5.2 Geben Sie das Doppelintegral mit vertauschter Integrationsreihenfolge an.

5.3 Berechnen Sie das Integral für $f(x, y) = 2x \sin x^2$.

Aufgabe 6 (Integral) Seien D das Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ sowie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ mit $a > 0$. Man berechne:

6.1 $\iint_D xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

6.2 $\iint_K \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$

6.3 $\iint_D \frac{2y}{x+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

6.4 $\iint_K \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Aufgabe 7 (Transformationsformel) Zu bestimmen ist das Bereichsintegral

$$\int_D \arctan \tfrac{x-y}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad \text{wobei} \quad D = \{(x,y)^\top \mid x^2+y^2 \le 2\}\,.$$

7.1 Führen Sie die Koordinatentransformation

$$x = s\,(\cos t + \sin t), \quad y = s\,(\cos t - \sin t) \quad \text{mit} \quad s \in [0,\infty[, \quad t \in [0,2\pi[$$

im gegebenen Integral durch und geben Sie das Bereichsintegral in den neuen Koordinaten an.

7.2 Berechnen Sie das Bereichsintegral.

Aufgabe 8 (Transformationsformel) Man berechne das Bereichsintegral

$$\int_D e^{(x+y)/(x-y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

wobei D der trapezförmige Bereich mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ und $(0,-1)$ sei.
Hinweis: Man führe die Koordinatentransformation $s = x+y$, $t = x-y$ durch.

Aufgabe 9 (Transformationsformel) Es seien R und α positiv. Die kreisförmige Platte $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le R^2\}$ eines Kondensators werde durch Elektronen aufgeladen, welche sich gemäß der Flächenladungsdichte $\varrho(x,y) = -\alpha(R^2-x^2-y^2)$ auf B verteilen.

9.1 Berechnen Sie die Gesamtladung $Q = \iint_B \varrho\,\mathrm{d}F$ der Platte direkt.

9.2 Benutzen Sie Polarkoordinaten, um die Rechnung zu vereinfachen.

Aufgabe 10 (Transformationsformel) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Nordhalbkugel $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2 \text{ mit } z \ge 0\}$ mit der Dichte $\rho(x,y,z) = z$.

Aufgabe 11 (Transformationsformel) Man betrachte den Kegel K im $\mathbb{R}^3$ mit der Spitze $(0,0,3)^\top$ und der Grundfläche $x^2+y^2 \le 1$ in der Ebene $z=0$. Die (inhomogene) Massendichte ρ von K sei gegeben durch $\rho(x,y,z) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$.

11.1 Veranschaulichen Sie sich die Situation durch eine geeignete Skizze des Kegels.

11.2 Bestimmen Sie mithilfe von Zylinderkoordinaten das Volumen V und die Gesamtmasse M von K.
Zur Kontrolle: $V(K) = \pi,\ M(K) = \frac{\pi}{2}$.

11.3 Bestimmen Sie den Massenschwerpunkt des Kegels.
Zur Kontrolle: $(x_s, y_s, z_s)^T = (0, 0, \frac{9}{10})^T$.

Aufgabe 12 (Gramsche Determinante) Eine Parkhausauffahrt P habe die Gestalt eines Wendelflächenstücks:

$$P = \{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1,x_2,x_3)^T = (u_2\cos u_1, u_2 \sin u_1, u_1)^T,\ 0 \le u_1 \le 2\pi,\ 5 \le u_2 \le 9\}\,.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt F von P und vergleichen Sie ihn mit dem Flächeninhalt F des Kreisrings R, der den Grundriss von P bestimmt. (Hinweis: Eine Stammfunktion von $\sqrt{1+x^2}$ lautet $\frac{1}{2}\,(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2}))$.

Aufgabe 13 (Tangential und Normalraum) Gegeben sind die folgenden Teilmengen $M_i \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{ \text{Gerade durch } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 0 \le x,y,z \le 2 \right\} \\
M_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = x^2,\ z = x \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 0 \le x,y,z \le 2 \right\}
\end{aligned}$$

Bestimme für beide Mengen jeweils eine geeignete Parametrisierung, bestimme den Tangential- und Normalraum und das Volumen der Menge