Andreas Wörfel / Henrik Thoma Ferienkurs Analysis 1 für Physiker
Lösung Probeklausur WS 2013/14

Aufgabe 1 *Trigonometrie und komplexe Zahlen / Punkte: [3, 2, 11]*

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

Lösung:

Wir wissen, dass $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ [0,5] und $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ [0,5]

Wir lösen die Identität für $\tan x$ nach $\sin x$ auf und setzen das in den Pythagoras ein:

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \overset{[1]}{=} \cos^2 x \tan^2 x + \cos^2 x = 1$$

Dies lösen wir nun nach $\cos x$ auf:

$$1 = \cos^2 x(1+\tan^2 x) \qquad \Longrightarrow \qquad \cos x = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \quad [1]$$

b) Leiten Sie aus a und aus den zwei unten angegebenen Additionstheoremen einen Ausdruck für $\sin\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$ und $\cos\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$ her. **(Dazu müssen Sie *a* nicht bearbeitet haben.)**

$$\cos\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos y)} \qquad \sin\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos y)}$$

Lösung:

Wir ersetzen zunächst den $\cos x$ in beiden Additionstheoremen mit der Angabe aus a.

$$\cos\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}}\right)} \quad [0,5] \qquad \sin\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}}\right)} \quad [0,5]$$

Nun setzen wir $y = \arctan x$

$$\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)} \quad [0,5] \qquad \sin\left(\frac{\arctan y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)} \quad [0,5]$$

c) Bestimmen Sie alle z, die folgende Bedingung erfüllen **(benötigt *b*, jedoch erst am Ende)**:

$$\frac{z}{5+5i} = \frac{1}{iz+4-i}$$

Lösung:

Zunächst müssen wir alle Lösungen ausschließen, für die das System nicht definiert ist.
Dies ist lediglich $iz+4-i=0$, also gilt: $z \neq 1+4i$ [1]

Nun formen wir um: $iz^2 + (4-i)z - 5 - 5i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 - (1+4i)z - 5 + 5i = 0$ [0,5]

Dafür müssen wir nun mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen die Lösungen suchen:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} + 2i \pm \frac{1}{2}\sqrt{5-12i} \quad [1]$$

Nun müssen wir **eine** 2. Wurzel w aus $5-12i$ berechnen [0,5].
$|5-12i| = \sqrt{25+144} = 13$ [0,5] und $\vartheta = \arctan\left(\frac{-12}{5}\right)$ [0,5]
Jetzt müssen wir $w^2 = 13\left[\cos\left(\arctan\frac{-12}{5}\right) + i\sin\left(\arctan\frac{-12}{5}\right)\right]$ [1] bestimmen.
Wir können nach **Moivre** schreiben:

$$w = \sqrt{13}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{-12}{5}\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{-12}{5}\right)\right] \quad [1]$$

Wir benutzen Teilaufgabe b und können damit schreiben:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{-12}{5}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-12}{5}\right)^2}}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\frac{169}{25}}}\right)} = \pm\frac{2}{\sqrt{13}} \quad [1]$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{-12}{5}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-12}{5}\right)^2}}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\frac{169}{25}}}\right)} = \pm\frac{3}{\sqrt{13}} \quad [1]$$

Außerdem wissen wir, dass $5-12i$ im 4. Quadranten liegt, also hat der Sinus negatives [0,5] und der Kosinus positives Vorzeichen [0,5].
Also ist

$$w = \sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}} + i\frac{-2}{\sqrt{13}}\right) = 3 - 2i \quad [0,5]$$

Damit finden wir durch Einsetzen:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} + 2i \pm \frac{1}{2}w = \frac{1}{2} + 2i \pm \frac{1}{2}(3-2i) \quad \Longrightarrow \quad z_1 = 2+i \quad [0,5] \qquad z_2 = -1+3i \quad [0,5]$$

Diese Lösungen sind außerdem verschieden von $z \neq 1+4i$. [0,5]

Bemerkung: Wir mussten nur eine Wurzel w berechnen, da die 2. Lösung der Wurzel (w_2) nur um ein Vorzeichen verschieden ist ($w = -w_2$), das auch aus dem „±“ in der Lösungsformel herauskommt.

Aufgabe 2 *Grenzwerte / Punkte: [3, 4]*

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

Lösung:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} \overset{[1]}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\right) \overset{[1]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x+\mathcal{O}(x^3)}{x} = 1\cdot 1 \overset{[1]}{=} 1$$

b)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{e^{-x}}$$

Lösung:
Wir benötigen 3 mal L'Hospital (je [1]) und können dann den Grenzwert bestimmen [1].

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{e^{-x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$$

Aufgabe 3 *Ableitungen* / *Punkte: [3, 3, 3]*

Bestimmen Sie folgende Ableitungen:

a) $y = b^{3x}$

Lösung:

$$y = b^{3x} \overset{[1]}{=} e^{3x\ln b} \qquad \Longrightarrow \qquad y' \overset{[0,5]}{=} e^{3x\ln b}(3x\ln b)' \overset{[0,5]}{=} e^{3x\ln b}(3\ln b) \overset{[1]}{=} 3b^{3x}\ln b$$

b) $y = \sin\ln\tan\sqrt{x^4+3}$

Lösung:

$$y' = \underbrace{\left(\cos\ln\tan\sqrt{x^4+3}\right)}_{[0,5]} \cdot \underbrace{\frac{1}{\tan\sqrt{x^4+3}}}_{[0,5]} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2\sqrt{x^4+3}}}_{[0,5]} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^4+3}}}_{[1]} \cdot \underbrace{4x^3}_{[0,5]}$$

c) $g'(1)$, wobei $g(y)$ die Umkehrfunktion der streng monotonen Funktion $y = f(x) = x + e^x$ ist.

Lösung:

Wir benutzen die Formel für die Differentiation der Umkehrfunktion. Sie lautet:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad [0,5]$$

Dafür brauchen wir den Wert $g(y) = x$, für den $y = f(x) = 1$. Diesen finden wir durch scharfes Hinsehen: $f(0) = 1$, also $g(1) = 0$ [1]

Dann ist weiter $f'(x) = 1 + e^x$ [0,5], also $f'(0) = 2$ [0,5]. Somit:

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2} \qquad [0,5]$$

Aufgabe 4 *Taylorreihe* / *Punkte: [5]*

Bestimmen Sie die Taylorreihe für $f(x) = xe^x$ an $x_0 = 0$.

Lösung:

Variante 1 (mechanisch)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (0+x)e^x & &\Longrightarrow & f(0) &= 0\\
f'(x) &= (1+x)e^x & &\Longrightarrow & f(0) &= 1\\
f''(x) &= (2+x)e^x & &\Longrightarrow & f(0) &= 2\\
&\vdots\\
f^{(k)}(x) &= (k+x)e^x & &\Longrightarrow & f^{(k)}(0) &= k \quad [2]
\end{aligned}$$

Somit kann man mit Kenntnis der Taylorformel sofort hinschreiben:

$$f(x) \overset{[2]}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^{k+1} \qquad [1]$$

Variante 2 (via Paramenter-Ableitung)

Wir können f auch als parameterabhängige Funktion aufschreiben. Wir setzen $\alpha = 1$ und können so f darstellen als:

$$f(x, \alpha) = \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha x} \overset{\alpha=1}{=} xe^x = f(x) \quad [2]$$

Wir kennen aber für die Funktion $e^{\alpha x}$ die Taylorentwicklung. Sie lautet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha x)^k \quad [1]$$

Das leiten wir nun nur noch nach α ab und setzen dann wieder $\alpha = 1$ ein

$$\frac{d}{d\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \frac{d}{d\alpha} \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k k \alpha^{k-1} \overset{\alpha=1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+1} \quad [2]$$

Variante 3 (elegant)

Wir kennen die Exponentialreihe und die Reihenentwicklung für x (x selbst). Das Cauchy-Produkt der Reihen ist daher besonders einfach - wir können das x einfach in die Summe ziehen:

$$xe^x = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+1} \quad [5]$$

Aufgabe 5 *Integrale / Punkte: [4,3]*

Man bestimme:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$$

Lösung:

Man substituiert $t = -x^2$ [1].
Dann ist $dt = -2xdx$, also $xdx = \frac{dt}{-2}$ [1]. Das setzt man dann ein und erhält:

$$\int_a^b -\frac{1}{2} e^t dt \overset{[1]}{=} \left[-\frac{1}{2} e^t \right]_a^b = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = \left[-\frac{1}{2e^{x^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \overset{[1]}{=} 0$$

Andererseits sieht der geübte Student, dass im Zähler (bis auf einen Vorfaktor) die Ableitung des Exponenten der e-Funktion steht (Kettenregel) und schreibt die Stammfunktion sofort hin und setzt dann die Grenzen ein (ebenfalls alle [4]).

b)

$$\int 4x \cos 2x dx$$

Lösung:

Partielle Integration führt hier am schnellsten zum Ziel. (Vergessenes $+C$ gibt Punktabzug!)

$$\int 4x \cos 2x dx \overset{[1]}{=} 4x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int 4 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x dx \overset{[1]}{=} 2x \sin 2x - 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2x + C \overset{[1]}{=} 2x \sin 2x + \cos 2x + C$$

Aufgabe 6 *Folgen und ihre Grenzwerte Punkte: 2/2/2*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \sqrt{n^2 - n} - n$

Lösung: $\sqrt{n^2-n} - n \overset{[1]}{=} \left(\sqrt{n^2-n} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2-n}+n}{\sqrt{n^2-n}+n} = \frac{n^2-n+n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} \overset{[\frac{1}{2}]}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} \overset{[\frac{1}{2}]}{\to} \frac{1}{2}$

b) $b_n = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ mit $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $x < y$

Lösung: $\sqrt[n]{x^n + y^n} \overset{[\frac{1}{2}]}{=} y \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1} \begin{cases} \overset{[\frac{1}{2}]}{\leq} y \cdot \sqrt[n]{1+1} \to y, \; da \frac{x}{y} < 1 \\ \overset{[\frac{1}{2}]}{\geq} y \cdot \sqrt[n]{0+1} \to y, \; da \frac{x}{y} > 0 \end{cases}$

Somit ist b_n nach dem Einschließungskriterium $\left[\frac{1}{2}\right]$ konvergent gegen y

c) $c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

Lösung: *Variante 1:* $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \begin{cases} \overset{[\frac{1}{2}]}{\leq} (1-0)^n \to 1, & da \; \frac{1}{n^2} > 0 \\ \overset{[1]}{\geq} 1 + n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \to 1, & nach\, Bernoulli \end{cases}$

Somit ist c_n nach dem Einschließungskriterium $\left[\frac{1}{2}\right]$ konvergent gegen 1

Variante 2: $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \overset{[1]}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n \overset{[1]}{\to} e^1 \cdot e^{-1} = 1$

Hinweis: Verwenden Sie bei c) die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx \; \forall n \geq 0 \; \forall x \geq -1$

Aufgabe 7 *Rekursive Definition von Folgen Punkte: 4/3/3*

Zu $c > 0$ ist die rekursiv definierte Folge (a_n) mit $a_{n+1} = 2a_n - c \cdot a_n^2$ und $a_0 \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$ gegeben.

Sie können die Teilaufgaben unabhängig voneinander lösen, indem Sie vorab gezeigtes als gültig annehmen!

a) Zeigen Sie, dass $a_n \leq \frac{1}{c}$ und $a_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

Lösung: $a_{n+1} = 2a_n - c \cdot a_n^2 = -c\left(-\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{c}a_n + a_n^2\right) = -c\left(-\frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{c} - a_n\right)^2\right)$

$= \frac{1}{c} - c\left(\frac{1}{c} - a_n\right)$ [1]

Vollständige Induktion:

IA: Für $n = 0$: $0 < a_0 \leq \frac{1}{c}$, da $a_0 \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

IV: $0 < a_n \leq \frac{1}{c}$

IS: $n \to n+1$

$$a_{n+1} = \frac{1}{c} - c\left(\frac{1}{c} - a_n\right)^2 \begin{cases} \overset{[1]}{>} \frac{1}{c} - c\left(\frac{1}{c} - 0\right)^2 = 0 & da \; a_n > 0 \\ \overset{[1]}{\leq} \frac{1}{c} - c\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c} & da \; a_n \leq \frac{1}{c} \end{cases}$$

Somit folgt $0 < a_{n+1} \leq \frac{1}{c}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

b) Zeigen Sie, dass $a_{n+1} \geq a_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

Lösung: *Variante 1:* Vollständige Induktion:

IA: $n = 0$: $a_1 = 2a_0 - ca_0^2 = a_0(2 - ca_0) \geq a_0\left(2 - \frac{c}{c}\right) = a_0$, da $a_0 \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$ [1]

IV: $a_{n+1} \geq a_n$

IS: $n \to n+1$

$$a_{n+2} \overset{\left[\frac{1}{2}\right]}{\cong} \frac{1}{c} - c\left(\frac{1}{c} - a_{n+1}\right)^2 \overset{[1]}{\geq} \frac{1}{c} - c\left(\frac{1}{c} - a_n\right)^2 \overset{\left[\frac{1}{2}\right]}{\cong} a_{n+1}$$

Variante 2: $a_{n+1} = 2a_n - ca_n^2 \overset{[1]}{\cong} a_n(2 - ca_n) \overset{[1]}{\geq} a_n$, da $0 < a_n \leq \frac{1}{c}$ [1] aus a)

c) Ist die Folge konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

Lösung: Aus der zuvor gezeigten Monotonie $\left[\frac{1}{2}\right]$ und Beschränktheit $\left[\frac{1}{2}\right]$, folgt die Konvergenz. Somit gilt:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a = \lim\limits_{n\to\infty}(2a_n - ca_n^2) = 2a - ca^2$ [1]

$\Rightarrow a = 2a - ca^2 \;\Rightarrow a = ca^2 \;\Rightarrow a = \frac{1}{c}$; $a = 0$ fällt weg, da monoton steigend [1]

Hinweis: Quadratisch ergänzen Sie a_{n+1} möglichst geschickt.

Aufgabe 8 *Konvergenz von Reihen Punkte: 3/3/4*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen divergieren, konvergieren oder sogar absolut konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\left(\frac{\sqrt[n]{5}}{(3-2)^{\frac{2}{n}}(2+3)^{\frac{2}{n}}}\right)^{n^2}$

Lösung: $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\left(\frac{\sqrt[n]{5}}{(3-2)^{\frac{2}{n}}(2+3)^{\frac{2}{n}}}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\left(\frac{\sqrt[n]{5}}{(9-4)^{\frac{2}{n}}}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\left(\frac{\sqrt[n]{5}}{(5)^{\frac{2}{n}}}\right)^{n^2}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\left(\left(\frac{5}{5^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\left(\frac{1}{5}\right)^n \overset{\left[\frac{1}{2}\right]}{\cong} \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n \overset{[1]}{\cong} -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$

$= -1 + \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)} = -1 + \frac{5}{8} \overset{[1]}{\cong} -\frac{3}{8}$

Da die Reihe eine geometrische Reihe ist, ist sie absolut konvergent. $\left[\frac{1}{2}\right]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{10}+(-1)^n\right)^n}{n^7}$

Lösung: Wurzelkriterium:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left|\left(\frac{1}{10}+(-1)^n\right)^n\right|}{n^7}} \overset{[1]}{\cong} \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{10}+(-1)^n\right|\sqrt[n]{\frac{1}{n^7}} \overset{[1]}{\cong} \left|\frac{1}{10}+1\right| \cdot 1 = 1{,}1 \overset{\left[\frac{1}{2}\right]}{>} 1$$

Somit ist die Reihe divergent $\left[\frac{1}{2}\right]$

c) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+3k+2}$

Lösung: Betrachte: $\frac{1}{k^2+3k+2} \overset{\left[\frac{1}{2}\right]}{\cong} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \overset{\left[\frac{1}{2}\right]}{\cong} \frac{1}{k+1} + \frac{-1}{k+2}$

Somit folgt für die Partialsumme:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{-1}{k+2} \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}$$

$$\overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} \frac{1}{0+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{n-1+2} \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} 1 - \frac{1}{n+1}$$

Somit folgt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} 1$$

Diese Reihe ist absolut konvergent, da alle Summanden positiv sind. $[\frac{1}{2}]$

Aufgabe 9 *Konvergenzradien von Potenzreihen Punkte: 2/1/2*

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^4}{(4k)!} x^k$

Lösung: $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{(k!)^4}{(4k)!} \cdot \frac{(4k+4)!}{\left((k+1)!\right)^4}\right| \overset{[1]}{\triangleq} \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{(k!)^4}{(4k)!} \cdot \frac{(4k)!\cdot(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}{(k!)^4\cdot(k+1)^4}\right|$

$$= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}{(k+1)^4}\right| \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(4+\frac{1}{k})(4+\frac{2}{k})(4+\frac{3}{k})(4+\frac{4}{k})}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^4}\right| = \frac{4^4}{1} \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} 256$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} (x-3)^k$

Lösung: $R = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(-1)^k}{4^k}\right|} \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} \limsup\limits_{k\to\infty} \frac{1}{4} \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} \frac{1}{4}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (-x)^k$

Lösung: $\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!\cdot(2k-k)!} \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} \frac{(2k)!}{k!\cdot k!}$

$$R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(2k)!}{k!\cdot k!} \cdot \frac{(k+1)!(k+1)!}{(2k+1)!}\right| \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(2k)!}{k!\cdot k!} \cdot \frac{k!k!}{(2k)!} \cdot \frac{(k+1)(k+1)}{(2k+2)(2k+1)}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)(k+1)}{(2k+2)(2k+1)}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)}{2\cdot(2k+1)}\right| \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)}{2\cdot(2+\frac{1}{k})}\right| \overset{[\frac{1}{2}]}{\triangleq} \frac{1}{4}$$