Andreas Wörfel / Henrik Thoma
Probeklausur

Ferienkurs Analysis 1 für Physiker
WS 2013/14

Aufgabe 1 *Trigonometrie und komplexe Zahlen / Punkte: [3, 2, 11]*

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

b) Leiten Sie aus a und aus den zwei unten angegebenen Additionstheoremen einen Ausdruck für $\sin\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$ und $\cos\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$ her. **(Dazu müssen Sie *a* nicht bearbeitet haben.)**

$$\cos\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos y)} \qquad \sin\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos y)}$$

c) Bestimmen Sie alle z, die folgende Bedingung erfüllen **(benötigt *b*, jedoch erst am Ende)**:

$$\frac{z}{5+5i} = \frac{1}{iz+4-i}$$

Aufgabe 2 *Grenzwerte / Punkte: [3, 4]*

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{e^{-x}}$$

Aufgabe 3 *Ableitungen / Punkte: [3, 3, 3]*

Bestimmen Sie folgende Ableitungen:

a) $y = b^{3x}$

b) $y = \sin\ln\tan\sqrt{x^4+3}$

c) $g'(1)$, wobei $g(y)$ die Umkehrfunktion der streng monotonen Funktion $y = f(x) = x + e^x$ ist.

Aufgabe 4 *Taylorreihe / Punkte: [5]*

Bestimmen Sie die Taylorreihe für $f(x) = xe^x$ an $x_0 = 0$.

Aufgabe 5 *Integrale / Punkte: [4,3]*

Man bestimme:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$$

b)

$$\int 4x\cos 2x dx$$

Aufgabe 6 *Folgen und ihre Grenzwerte* *Punkte: 2/2/2*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \sqrt{n^2 - n} - n$
b) $b_n = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ mit $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $x < y$
c) $c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

Hinweis: Verwenden Sie bei c) die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx \; \forall n \geq 0 \; \forall x \geq -1$

Aufgabe 7 *Rekursive Definition von Folgen* *Punkte: 4/3/3*

Zu $c > 0$ ist die rekursiv definierte Folge (a_n) mit $a_{n+1} = 2a_n - c \cdot a_n^2$ und $a_0 \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$ gegeben.

Sie können die Teilaufgaben unabhängig voneinander lösen, indem Sie vorab gezeigtes als gültig annehmen!

a) Zeigen Sie, dass $a_n \leq \frac{1}{c}$ und $a_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$
b) Zeigen Sie, dass $a_{n+1} \geq a_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$
c) Ist die Folge konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

Hinweis: Quadratisch ergänzen Sie a_{n+1} möglichst geschickt.

Aufgabe 8 *Konvergenz von Reihen* *Punkte: 3/3/4*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen divergieren, konvergieren oder sogar absolut konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{\sqrt[n]{5}}{(3-2)^{\frac{2}{n}}(2+3)^{\frac{2}{n}}}\right)^{n^2}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{10}+(-1)^n\right)^n}{n^7}$
c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$

Aufgabe 9 *Konvergenzradien von Potenzreihen* *Punkte: 2/1/2*

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^4}{(4k)!} x^k$
b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} (x-3)^k$
c) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (-x)^k$