Andreas Wörfel
Lösung Donnerstag

Aufgabe 1 *Zum Aufwärmen: Polynomdivision*

Berechnen Sie: $(2x^6 + 8x^5 + 3x^4 - 20x^3 - 13x^2 + 28x + 28) : (x^2 + 4x + 4)$

Lösung:

$$
\begin{array}{l}
\big(2x^6 + 8x^5 + 3x^4 - 20x^3 - 13x^2 + 28x + 28\big) : \big(x^2 + 4x + 4\big) = 2x^4 - 5x^2 + 7 \\
\underline{-2x^6 - 8x^5 - 8x^4} \\
\qquad\qquad -5x^4 - 20x^3 - 13x^2 \\
\qquad\qquad \underline{\ \ 5x^4 + 20x^3 + 20x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 7x^2 + 28x + 28 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-7x^2 - 28x - 28} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Aufgabe 2 *Logarithmus*

Zeigen Sie, dass für den Logarithmus gilt: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, indem Sie:

a) den Grenzwert des Differenzenquotienten unter Zuhilfenahme der Rechenregeln für den Logarithmus bilden.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)}{x_0 + h - x_0} \overset{\substack{\text{Setze}\\ x_0=:x}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \cdot \frac{1}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} \right) = \lim_{h\to 0} \left(\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} \right) \overset{\substack{\textit{Setze}\\ 1/h=:k}}{=} \lim_{k\to\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{k}\right)^{k} \right) \\
&\overset{\text{ln stetig}}{=} \ln\left(\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{k}\right)^{k} \right) = \ln\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

b) die Ableitung mit der Umkehrfunktion bilden.

Lösung:

$$
(\ln y)' = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}
$$

Aufgabe 3 *Kettenregel*

Beweisen Sie die Kettenregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ durch geschicktes Erweitern des Differentialquotienten.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 *Korollar: Quotientenregel*

Zeigen Sie die Quotientenregel. Sie dürfen Summen-, Produkt- und Kettenregel sowie die Ableitungen von Potenzfunktionen als gegeben und bewiesen annehmen.

Lösung:

Seien f und g wie in der Vorlesung gefordert. Dann ist:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(g^{-1}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-g^{-2}\right)g' = f'\frac{1}{g} - f\frac{1}{g^2}g' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Aufgabe 5 *Spezielle Ableitungen*

Leiten Sie $f(x) = x^x$ und $g(x) = \operatorname{arcosh}(x)$ mittels spezieller Ableitungstechniken ab.

Lösung:

1. Es ist $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$. Dann leiten wir einfach ab:

$$f'(x) = \exp(x \ln x)(x \ln x)' = x^x(1 + \ln x)$$

2. Wir substituieren: $x = \cosh y$, also f(y) = y

$$g'(y) = 1 = \operatorname{arcosh}'(\cosh y) \cdot \cosh' y = \operatorname{arcosh}'(\cosh y) \cdot \sinh y$$

Wir wissen außerdem die Identität: $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1}$. Also:

$$\operatorname{arcosh}'(\cosh y) = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Aufgabe 6 *Wendetangente und Extrema*

Gegeben sei: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
Geben Sie Art und Lage der Extrema und bestimmen Sie Nullstellen sowie die Tangente an den Wendepunkt.

Lösung:

Zunächst bestimmen wir eine Nullstelle. Durch scharfes Hinsehen können wir eine Nullstelle finden, z.B. $x = 1$.
Dann wenden wir Polynomdivision an:

$$\begin{array}{l}
\left(\;\; x^3 - 3x^2 - 6x + 8\right) : \left(x - 1\right) = x^2 - 2x - 8 \\
\underline{-x^3 \;\; + x^2} \\
\quad\;\; -2x^2 - 6x \\
\quad\;\; \underline{\;\; 2x^2 - 2x} \\
\qquad\qquad\; -8x + 8 \\
\qquad\qquad\; \underline{\;\; 8x - 8} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

Dann können durch Satz von Vieta oder Lösungsformel die weiteren Nullstellen gefunden werden: $x = 4$ und $x = -2$
Wir benötigen nun die ersten 3 Ableitungen:

- $f'(x) = 3x^2 - 6x - 6$
- $f''(x) = 6x - 6$
- $f'''(x) = 6$

Es ist $f'(x) = 3x^2 - 6x - 6 \stackrel{!}{=} 0$. Per Lösungsformel finden wir: $x_{+,-} = 1 \pm \sqrt{3}$
Entweder wir kennen den Verlauf des Graphen von $-\infty$ nach $+\infty$ und wissen daher schon, dass die Minus-Lösung das Maximum und die andere ein Minimum ist, oder wir benutzen die 2. Ableitung: $f''(x_-) = -\sqrt{3} < 0$ und $f''(x_+) = \sqrt{3} > 0$
Nun die Wendetangente: $f''(x) = 6x - 6 \stackrel{!}{=} 0$, also $x = 1$.
Offensichtlich ist $f'''(1) = 6 \neq 0$, also haben wir einen Wendepunkt. Weiterhin ist: $f'(1) = -9$
$y(x) = f'(x) \cdot x + t$ wird von $(x, y) = (1, 0)$ gelöst, also ist $t = 9$ und somit: $y(x) = -9x + 9$

Aufgabe 7 *Taylorreihe: Euler- und Polardarstellung*

Am Montag in der Vorlesung haben wir behauptet, es gelte $\cos x + i \sin x = e^{ix}$. Dies möchten wir nun beweisen.

a) Stellen Sie die Taylorreihe für $f = \sin x$ um $x_0 = 0$ auf.

Lösung:

Wir überlegen uns die ersten Terme:

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = \cos(0) = 1 \qquad f''(0) = -\sin(0) = 0 \qquad f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$$
$$f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0 = f(0) \qquad f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1 = f'(0)$$

Wir sehen, dass sich ab der 4. Ableitung die Terme wiederholen. Daraus können wir sofort die Taylorreihe durch etwas Überlegen als Summe konstruieren:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

b) Stellen Sie die Taylorreihe für $g = \cos x$ um $x_0 = 0$ auf.

Lösung:

Wir schauen uns Aufgabe $a)$ an, wo wir schon so schlau waren, alle Terme bis zur 5. Ableitung auszurechnen. Wir sehen scharf hin und entdecken, dass $g = f'$, $g' = f''$) und so weiter. Damit stellen wir die Taylorreihe analog auf:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

c) Stellen Sie die Taylorreihe für $h = e^{ix}$ um $x_0 = 0$ auf und vergleichen Sie diese mit $f(x) + ig(x) = \cos x + i \sin x$.

Lösung:

Aus der Vorlesung wissen wir:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{ix} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^j}{j!}$$

Wir betrachten den Term i^j und stellen fest: $i^{2j} = (-1)^j$ und $i^{2j+1} = i(-1)^{2j}$. Also können wir die Summe zerlegen und schreiben:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{\substack{j\,=\,0 \\ j \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(ix)^j}{j!} + \sum_{\substack{j\,=\,1 \\ j \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(ix)^j}{j!} \overset{j \to k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k+1)!} (x)^{2k+1} = \cos x + i \sin x
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 *Verschiedene Integrale*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Techniken, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Lösung: (setze Integrationskonstante c==0)

a) Substituiere $t = (2x-5)$, $dx = \frac{1}{2}dt$

$$\int (2x-5)^5 dx = \int t^5 \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{12}t^6 = \frac{1}{12} \cdot (2x-5)^6$$

b) Substituiere $t = x^2$, $2xdx = dt$ und $\sin t = u$, $\cos t dt = du$

$$\int 2x \cot(x^2) dx = \int \cot t dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\sin t| = \ln|\sin x^2|$$

c) Substituiere $t = \arcsin x$, $dx = \sqrt{1-x^2}dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\arcsin x|$$

d) Zweifache partielle Integration

$$\int 2x \ln^2 x dx = x^2 \ln^2 x - \int x^2 \cdot 2\frac{\ln x}{x} dx = x^2 \ln x - \int 2x \ln x dx$$

$$\int 2x \ln x dx = x^2 \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\implies \quad \int 2x \ln^2 x dx = x^2 \ln x - (x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2) = x^2(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2})$$

e) Logarithmisch: Zähler als Ableitung des Nenners

$$\int \frac{1}{x \ln 2x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln 2x} dx = \ln|\ln 2x|$$

f) Partielle Integration

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int 1 \cdot \tan x dx = x \tan x + \ln|\cos x|$$

g) Zweifache partielle Integration

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$$\xrightarrow[\text{nach links}]{\text{Integral}} \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

h) Substituiere $x^2 + \cos^2 x = t$, $dt = 2(x - \cos x \sin x)dx$

$$\int \frac{x - \cos x \sin x}{x^2 + \cos^2 x} dx = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln|x^2 + \cos^2 x|$$

i) Geschicktes Einfügen einer 0, partielle Integration:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \arctan x - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2xdx}{(x^2+1)^2}$$

$$\xRightarrow{verwende} \int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1}{f^2} \cdot f' dx = \frac{-1}{f} = \frac{-1}{x^2+1}$$

$$\xRightarrow{PI} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \arctan x - \frac{1}{2}\left(x \cdot \frac{-1}{x^2+1} - \underbrace{\int \frac{-1}{x^2+1} dx}_{arctan}\right) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$

Alternativ: Geschicktes Einfügen einer 1, partielle Integration:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \underbrace{\frac{1}{2x}}_{v} \underbrace{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}_{v'} dx \overset{PI}{=} \frac{-1}{2x(x^2+1)} - \int \frac{dx}{2x^2(x^2+1)}$$

$$\overset{PBZ}{\Longrightarrow} \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

Das können wir nun Integrieren und dann noch zusammenfassen und erhalten das gleiche Ergebnis wie oben.

j) Polynomdivision, Partialbruchzerlegung, Substitution
Zuerst müssen wir uns $\int \frac{x^6+16}{x^4-4} dx$ in handhabbare Stücke zerlegen.

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^6 \qquad\quad + 16\big) : \big(x^4 - 4\big) = x^2 + \dfrac{4x^2+16}{x^4-4} \\ \underline{-\, x^6 + 4x^2} \\ \qquad\quad 4x^2 \end{array}$$

Also haben wir ein zunächst ein leichtes Integral zu lösen und eines über einen Bruch, der per Partialbruchzerlegung aufgelöst werden muss:

$$\frac{4x^2+16}{x^4-4} = \frac{4x^2+16}{(x^2+2)(x^2-2)} = \frac{4x^2+16}{(x^2+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$$

Wir können den Term (x^2+2) so stehen lassen, da wir wissen, dass er 2 einfache komplexe Nullstellen hat (wir aber nur reelle Brüche brauchen) und wir diesen später mit arctan integrieren können. Wir setzen an:

$$\frac{4x^2+16}{(x^2+2)(x^2-2)} = \frac{A}{x^2+2} + \frac{B}{x-\sqrt{2}} + \frac{C}{x+\sqrt{2}} = \frac{A(x^2-2) + B(x^2+2)(x+\sqrt{2}) + C(x^2+2)(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)(x^2-2)}$$

Nun setzen wir der Reihe nach im Zähler 3 Nullstellen ein: $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$ und $x = i\sqrt{2}$. Wir erhalten der Reihe nach:

- $x = \sqrt{2}$: $24 = 8\sqrt{2}B \Longrightarrow B = \frac{3}{\sqrt{2}}$
- $x = -\sqrt{2}$: $24 = -8\sqrt{2}C \Longrightarrow C = -\frac{3}{\sqrt{2}}$
- $x = i\sqrt{2}$: $8 = -4A \Longrightarrow A = -2$

Also liefert die PBZ:

$$\frac{4x^2+16}{x^4-4} = -\frac{2}{x^2+2} - \frac{3}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} + \frac{3}{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})}$$

Nun führen wir Umformungen und Substitutionen durch, um die Integrale zu lösen, einmal $u = x - \sqrt{2}$, $du = dx$ und einmal $s = x + \sqrt{2}$, $dx = ds$:

$$\int \left(x^2 - \frac{2}{x^2+2} - \frac{3}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} + \frac{3}{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{2}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right)} dx - \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{s} ds + \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u} du = \otimes$$

Um das 1. Integral lösen zu können, substituieren wir auch hier: $\frac{x}{\sqrt{2}} = t$, $dx = \sqrt{2}dt$

$$\otimes = \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{2}dt - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln|s| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln|u| = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{2}\arctan(t) - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln|s| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln|u|$$

Nun müssen wir noch resubstituieren und die Logarithmen zusammenfassen, dann sind wir fertig:

$$\int \frac{x^6+16}{x^4-4} = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$$

k) Substituiere $g^{-1}(x) = x^2 = t$ und $2xdx = dt$

$$\int_0^2 2xe^{x^2} dx = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(2)} e^t dt = \int_0^4 e^t = \left[e^t\right]_0^4 = e^4 - 1$$

l) Substituiere $g^{-1}(x) = \sin x = t$, $\cos x dx = dt$ und verwende $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\sin^2 x)\cdot \cos x}{1-\sin x} dx = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(\pi/2)} \frac{1-t^2}{1-t} dt = \int_0^1 (1+t) dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Genau genommen haben wir hier ein *scheinbar* uneigentliches Integral (Nenner =0 an oberer Grenze). Jedoch zeigt die Substitution: Es liegt eine hebbare Unstetigkeitsstelle vor.

m) Umschrift mittels komplexer Identität. Es ist somit nicht nötig, ein Additionstheorem zu verwenden, es ergibt sich automatisch

$$\int \cos^2(t) e^t dt = \int \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 e^t dt = \int \frac{1}{4}\left(e^{2it}+e^{-2it}+2e^0\right) e^t dt = \int \frac{e^t}{2} dt + \frac{1}{4}\int \left(e^{t(1+2i)} + e^{t(1-2i)}\right) dt$$

$$= \frac{e^t}{2} + \frac{e^{t(1+2i)}}{4(1+2i)} + \frac{e^{t(1-2i)}}{4(1-2i)} = \frac{e^t}{2} + e^t \cdot \frac{e^{2it}(1-2i)+e^{-2it}(1+2i)}{4(1+2i)(1-2i)} = \frac{e^t}{2} + e^t \cdot \frac{e^{2it}+e^{-2it}-2ie^{2it}+2ie^{-2it}}{4\cdot 5}$$

$$= \frac{e^t}{2} + e^t \cdot \frac{\cos(2t)}{10} + e^t \cdot \frac{\sin(2t)}{5}$$

Aufgabe 9 *Gauß-Integral*

Das sehr bekannte Gauß-Integral für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ lautet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Dieses dürfen Sie als gegeben annehmen. Berechnen Sie nun ohne partielles Integrieren mit Hilfe geschickter Anwendung der Leibniz-Regel für Parameterintegrale das folgende Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

Lösung:

Wir haben ein von α abhängiges Parameterintegral. Wir können dieses geschickt umschreiben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x^2} dx$$

Dann erinnern wir uns an die Leibniz-Regel für Parameterintegrale. Da wir keine von α abhängigen Integrationsgrenzen haben, entfallen der 2. und 3. Term und wir können nun die Regel „rückwärts“ anwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

Jetzt verwenden wir den Hinweis aus der Angabe:

$$-\frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Einmal noch ableiten, dann sind wir fertig:

$$-\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = -\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\pi}\cdot\alpha^{-\frac{1}{2}} = -\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\cdot\alpha^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

Aufgabe 10 *L'Hospital?*

Wenden Sie die verschiedenen gelernten Techniken an, um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen.

Lösung:

a)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

c) Bei direktem und mehrmaligem Anwenden von L'Hospital drehen wir uns im Kreis. Statt dessen Definiton des sinh / cosh:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$$

d) Hier wäre L'Hospital direkt möglich, aber nicht zu empfehlen. Besser:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\frac{\arctan x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\arctan x}}_{2/\pi} \overset{\frac{1}{x}=y}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \frac{2}{\pi} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^y}{1} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

e) **Hinweis:** $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \mathcal{O}(x^6)$
4 mal L'Hospital liefert das Ergebnis, ist aber extrem viel Arbeit. Besser: Verwende bekannte Potenzreihen:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4 \mp \dots) - (1-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \dots)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^4 + \dots}{x^4} \overset{4x L'H}{=} \frac{1}{6}$$

Wir haben zuerst verwendet, dass alle Terme im Zähler mit Grad größer 4 für $x \to 0$ verschwinden. Dann bleiben nur Terme mit Grad 4 oder kleiner. Bei diesen können wir entweder scharf hinsehen oder 4 mal L'Hospital anwenden (das wirft alle Terme mit Grad kleiner 4 raus) und erhalten das Ergebnis.

Zusatzaufgabe

Aufgabe 11 *Konvergenz von Integralen (alte Klausuraufgaben)*

Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz.

a) für $r \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^r}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst eine endliche Integrationsgrenze.

Lösung:

Für $r = 1$ haben wir den Logarithmus als Stammfunktion, dieser ist monoton und unbeschränkt, also divergiert das Integral.

Wir betrachten danach laut Hinweis zunächst eine endliche Integrationsgrenze t und $r \neq 1$:

$$\int_1^t \frac{dx}{x^r} = \left[\frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{x^{r-1}}\right]_1^t = \frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{t^{r-1}} - 1\right)$$

Für $r < 1$ können wir den Faktor mit t in den Zähler hochziehen und sehen sofort, dass das Integral divergiert für $t \to \infty$.
Für $r > 1$ können wir den Grenzwert bilden und erhalten: $\frac{1}{r-1}$
Also insgesamt:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^r} = \begin{cases} \dfrac{1}{r-1} & r > 1 \\ \infty & r \leq 1 \end{cases}$$

b)

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx$$

Hinweis: Teilen Sie das Integral, substituieren Sie und schätzen Sie geschickt ab.

Lösung:

$$0 \leq \int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^{\sqrt{\frac{3\pi}{2}}} \sin x^2 dx + \overbrace{\int_{\sqrt{\frac{3\pi}{2}}}^\infty \sin x^2 dx}^{\text{Substituiere } x^2=t} \leq \int_0^{\sqrt{\frac{3\pi}{2}}} 1dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt \overset{\text{PI}}{=}$$

$$x|_0^{\sqrt{\frac{3\pi}{2}}} + \left.\frac{-\cos t}{2\sqrt{t}}\right|_{\frac{3\pi}{2}}^\infty - \int_{\frac{3\pi}{2}}^\infty \frac{-\cos t}{-4\sqrt{t}^3}dt = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} - 0 + 0 - 0 - \underbrace{\int_{\frac{3\pi}{2}}^\infty \frac{\cos t}{4\sqrt{t}^3}dt}_{>0}$$

Dass das letzte Integral größer Null ist, lässt sich leicht zeigen, wenn man es in Stücke zu $t = n \cdot 2\pi$ teilt, und feststellt, dass diese immer größer Null sind. Dabei hilft uns, dass wir die untere Grenze so gewählt haben, dass der Kosinus den Wert 0 hat und dann ansteigt. Der Nenner sorgt dafür, dass der weiter rechts liegende (negative) Teil einer Schwingung weniger Fläche einschließt (die Funktion wird unter der Funktion $\frac{1}{4\sqrt{t}^3}$ eingesperrt, diese bildet ein konvergente Majorante, welches man aus Aufg. a herleiten kann). Mit einem ähnlichen Argument können wir folgern, dass das Integral aus der Aufgabenstellung immer größer gleich Null sein muss.
Außerdem können wir dann folgern, dass

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^\infty \frac{\cos t}{4\sqrt{t}^3}dt \leq \sqrt{\frac{3\pi}{2}}$$

Andernfalls wäre nämlich das Ergebnis kleiner 0, was wir oben bereits ausgeschlossen haben. Somit gilt:

$$0 \leq \int_0^\infty \sin x^2 dx \leq \sqrt{\frac{3\pi}{2}}$$

Also konvergiert das Integral, weil wir eine konvergente Majorante gefunden haben.