Aufgabe 1 *Zum Aufwärmen: Polynomdivision*

Berechnen Sie: $(2x^6 + 8x^5 + 3x^4 - 20x^3 - 13x^2 + 28x + 28) : (x^2 + 4x + 4)$

Aufgabe 2 *Logarithmus*

Zeigen Sie, dass für den Logarithmus gilt: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, indem Sie:

a) den Grenzwert des Differenzenquotienten unter Zuhilfenahme der Rechenregeln für den Logarithmus bilden.

b) die Ableitung mit der Umkehrfunktion bilden.

Aufgabe 3 *Kettenregel*

Beweisen Sie die Kettenregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ durch geschicktes Erweitern des Differentialquotienten.

Aufgabe 4 *Korollar: Quotientenregel*

Zeigen Sie die Quotientenregel. Sie dürfen Summen-, Produkt- und Kettenregel sowie die Ableitungen von Potenzfunktionen als gegeben und bewiesen annehmen.

Aufgabe 5 *Spezielle Ableitungen*

Leiten Sie $f(x) = x^x$ und $g(x) = \text{arcosh}(x)$ mittels spezieller Ableitungstechniken ab.

Aufgabe 6 *Wendetangente und Extrema*

Gegeben sei: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
Geben Sie Art und Lage der Extrema und bestimmen Sie Nullstellen sowie die Tangente an den Wendepunkt.

Aufgabe 7 *Taylorreihe: Euler- und Polardarstellung*

Am Montag in der Vorlesung haben wir behauptet, es gelte $\cos x + i \sin x = e^{ix}$. Dies möchten wir nun beweisen.

a) Stellen Sie die Taylorreihe für $f = \sin x$ um $x_0 = 0$ auf.

b) Stellen Sie die Taylorreihe für $g = \cos x$ um $x_0 = 0$ auf.

c) Stellen Sie die Taylorreihe für $h = e^{ix}$ um $x_0 = 0$ auf und vergleichen Sie diese mit $f(x) + ig(x) = \cos x + i \sin x$.

Aufgabe 8 *Verschiedene Integrale*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Techniken, die in der Vorlesung behandelt wurden.

a)
$$\int (2x-5)^5 dx$$

b)
$$\int 2x \cot(x^2) dx$$

c)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$$

d)
$$\int 2x \ln^2 x dx$$

e)
$$\int \frac{1}{x \ln 2x} dx$$

f)
$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

g)
$$\int e^x \sin x dx$$

h)
$$\int \frac{x - \cos x \sin x}{x^2 + \cos^2 x} dx$$

i) **Hinweis:** Fügen Sie eine geschickte multiplikative 1 oder additive 0 (im Zähler) hinzu und teilen Sie dann das Integral:
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

j) (Rechenintensive Aufgabe, die das ganze Können verlangt)
Hinweis: Partialbruchzerlegung, jedoch keine Zerlegung mit komplexen Nullstellen ansetzen. Verwenden Sie außerdem arctan und ln zum integrieren:
$$\int \frac{x^6+16}{x^4-4} dx$$

k)
$$\int_0^2 2xe^{x^2} dx$$

l)
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$$

m)
$$\int \cos^2(t) e^t dt$$

Aufgabe 9 *Gauß-Integral*

Das sehr bekannte Gauß-Integral für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ lautet:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Dieses dürfen Sie als gegeben annehmen. Berechnen Sie nun ohne partielles Integrieren mit Hilfe geschickter Anwendung der Leibniz-Regel für Parameterintegrale das folgende Integral:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

Aufgabe 10 *L'Hospital?*

Wenden Sie die verschiedenen gelernten Techniken an, um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen.

a)
$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

c)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

d)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{\arctan x}{x}}$$

e)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Hinweis: $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \mathcal{O}(x^6)$

Zusatzaufgabe

Aufgabe 11 *Konvergenz von Integralen (alte Klausuraufgaben)*

Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz.

a) für $r \in \mathbb{R}$:
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^r}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst eine endliche Integrationsgrenze.

b)
$$\int_0^\infty \sin x^2 dx$$

Hinweis: Teilen Sie das Integral, substituieren Sie und schätzen Sie geschickt ab.