TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Musterlösung zu Übungsblatt 3

Potenzreihen, Exponentialfunktion, Stetigkeit, Konvergenz, Grenzwert

12.03.2014

1. Konvergenzradien von Potenzreihen I

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^4-4n^3)x^n$

Lösung: $\sum_{n=0}^{\infty}(n^4-4n^3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^4-4n^3|}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt[n]{n}\right)^4\cdot\sqrt[n]{\left|1-\frac{4}{n}\right|}\right)}=1$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2}x^n$

Lösung: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^n+e^{-n}}{2}\cdot\frac{2}{e^{n+1}+e^{-(n+1)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+e^{-2n}}{e+e^{-(2n+1)}}=\frac{1}{e}$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{5n+1}}{1+2^n}$

Lösung:

1. *Variante:* Wurzelkriterium liefert:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x^{5n+1}|}{1+2^n}}=\limsup_{n\to\infty}\frac{|x|^{5+\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{1+2^n}}=\frac{|x|^5}{2}<1 \text{ für absolute Konvergenz} \Rightarrow R=\sqrt[5]{2}$$

2. *Variante:* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{5n+1}}{1+2^n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^5)^n}{1+2^n}=x\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(x^5)^n$

$R'=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|1+2^n|}}}=\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|1+2^n|}=2$, somit konvergent für

$$|x|^5<R'=2 \quad\Rightarrow\quad |x|<\sqrt[5]{2}=R$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}x^n$

Lösung: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{(2+(-1)^n)}{\sqrt[n]{n}}}=\frac{1}{3}$$

Da kein Grenzwert existiert (sondern nur Häufungspunkte) muss tatsächlich der Limes superior gebildet werden

2. Funktionalsgleichung der Exponentialfunktion

Beweisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ mit Hilfe des Cauchy-Produkts:

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z+w)$$

Lösung: Da die Exponentialreihe absolut konvergent ist, kann hier das Cauchy-Produkt verwendet werden:

$$\mathrm{Exp}(z) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{z^k w^{n-k}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{z^k w^{n-k}}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w)$$

3. Stetigkeit der Exponentialfunktion

Benutzen Sie die Stetigkeit der Exponentialfunktion, um $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ zu zeigen.

Hinweis: Betrachten Sie hierzu den Grenzwert der Folge $b_n = e^{a_n}$

Lösung: Man betrachte:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} e^{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1$$

Somit gilt aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)} = e^1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

4. Konvergenzradien von Potenzreihen II

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} c^{n^2} x^n, \;\; c \in \mathbb{R}$

Lösung:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|c^{n^2}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |c|^n} = \begin{cases} 0 \;\; f\ddot{u}r \; |c| > 1 \\ \infty \; f\ddot{u}r \; |c| < 1 \\ 1 \;\; f\ddot{u}r \; |c| = 1 \end{cases}$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} c^n x^{n^2}, \;\; c \in \mathbb{R}$

Lösung: Mit dem Wurzelkriterium folgt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|c^n x^{n^2}\right|} = \limsup_{n\to\infty} |c||x|^n = \begin{cases} 0 \;\; f\ddot{u}r \; |x| < 1 \\ \infty \; f\ddot{u}r \; |x| > 1 \;\; \wedge c \neq 0 \\ c \;\; f\ddot{u}r \; |x| = 1 \vee c = 0 \end{cases} \quad < 1 \text{ für Konvergenz}$$

$$\Rightarrow R = \begin{cases} \infty \; f\ddot{u}r \; c = 0 \\ 1 \; sonst \end{cases}$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \, x^n$

Lösung: Betrachte für $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \geq \left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n}{2}}$ Da mehr als $\frac{n}{2}$ der Produkte größer sind als $\frac{n}{3}$.

Somit folgt:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}}} = 0$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n \cdot n!} x^n$

Lösung: $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!}{(3n)^n \cdot n!} \cdot \frac{(3n+3)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+2)!}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(3n+3)^n}{3^n} \frac{(3n+3)\cdot(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{3n+3}{3}\right)^n \cdot \frac{(3n+3)}{2\cdot(2n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{(3+\frac{3}{n})}{(4+\frac{2}{n})}\right) = \frac{3}{4} e$

5. Sinus, Cosinus

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

Lösung: $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$

$= [\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)]\cos(x) - [\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x)]\sin(x)$

$= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) = \cos^3(x) - 3(1 - \cos^3(x))\cos(x)$

$= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

b) $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$

Lösung: $\sin(3x) = \sin(2x + x)$

$= [\sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)]\cos(x) + [\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)]\sin(x)$

$= -\sin^3(x) + 3\sin(x)\cos^2(x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$

c) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Lösung: $\sin^2(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}((e^x)^2 - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2)$

$= -\frac{1}{4}(-2 + e^{2x} + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(2 - 2\cos(2x)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Hinweis: Benutzen Sie bei c) die Exponentialdarstellung

6. Konvergenz von Potenzreihen III

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+3)}{n}\right)^{n^2} x^n$

Lösung: $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{(n+3)}{n}\right)^{n^2}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left|\left(\frac{(n+3)}{n}\right)\right|^n} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^3}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 7x^{\frac{n}{3}}$

Lösung: Mit dem Wurzelkriterium folgt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|7x^{\frac{n}{3}}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} \cdot |x|^{\frac{1}{3}} = |x|^{\frac{1}{3}} < 1 \text{ für konvergent}$$

$\Rightarrow R = 1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} x^n$

Lösung: $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^{n+2}}{2^n}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{9 \cdot \left|\frac{3^n}{2^n}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{3}{2} \cdot \sqrt[n]{9}} = \frac{2}{3}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} x^n$

Lösung: $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n+2}{2^n}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{n+2}} = 2$

7. Stetigkeit

a) Sei $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^s$ stetig ist

Lösung: Es ist $x^s = \exp(s\, ln(x))$. Die Funktion $\exp\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \to \exp(x)$ ist stetig und streng monoton wachsend. Außerdem ist die Umkehrfunktion $\ln\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = 0$ stetig und streng monoton wachsend.
Also ist f als Verknüpfung stetiger Funktionen $x \mapsto \ln(x) \mapsto s\ln(x) \mapsto \exp(s\, ln(x)) = x^s$ stetig.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$. Zeigen Sie, dass f stetig ist

Lösung: Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist f stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen. Es gilt:
$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1\ \ \forall x \neq 0$ und $\lim_{x\to 0, x\neq 0} x = 0$
Daraus folgt, dass $\lim_{x\to 0, x\neq 0} x\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$. Die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ wird also durch den Funktionswert 0 stetig in 0 fortgesetzt. Also ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

8. Gleichmäßige Stetigkeit

Untersuchen Sie, welche der Funktionen gleichmäßig stetig sind:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

Lösung: Nicht gleichmäßig stetig, Beweis durch Widerspruch:
Sei $\varepsilon > 0$. Annahme: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x_2, x_2 \in \}R$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
Wegen $\left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - x\right| < \delta$ müsste dann für gleichmäßige Stetigkeit folgen, dass $\left|f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Es gilt aber für $x \neq -\frac{\delta}{4}$:
$$\lim_{x\to\infty}\left|f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x)\right| = \lim_{x\to\infty}\left|x^2 + \delta x + \frac{\delta^2}{4} - x^2\right| = \lim_{x\to\infty}\delta\left|x + \frac{\delta}{4}\right| = \infty$$
$\Rightarrow$ Widerspruch!

b) $f : [10^{-4}, \infty) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{1}{x}$

Lösung: Gleichmäßig stetig:
Sei $\varepsilon > 0$ und seien $x_1, x_2 \geq 10^{-4}$, dann gilt:
$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| \leq \frac{1}{10^{-8}}|x_1 - x_2| = 10^8|x_1 - x_2|$.
Wählt man also $\delta = \frac{1}{10^8}\varepsilon$, so folgt aus $x_1, x_2 \in [10^{-4}, \infty), |x_1 - x_2| < \delta$, dass $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
Bemerkung: f ist mit $L = 10^8$ sogar Lipschitz-stetig

c) $f : \left[\sqrt{2}, 6\right] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{x^{2011} - 18}{46 + |x|^7}$

Lösung: Die Funktion f ist als Verknüpfung von stetigen Funktionen stetig. Zudem ist das Intervall $\left[\sqrt{2}, 6\right]$ kompakt, somit folgt die gleichmäßige Stetigkeit (als stetige Funktion auf Kompaktum)

9. Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) := \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-Stetig ist.

Lösung: f ist stetig auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ und damit dort auch gleichmäßig stetig.

f ist aber nicht Lipschitz-stetig. Annahme: Es gibt ein $l > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \geq L|x - y|\ \forall x, y \in [0,1]$, d.h. $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq L$ (falls $x \neq y$) $(\star)$

Da dies für alle $x, y \in [0,1]$ gelten muss, wähle man speziell $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{4n^2}$, dann gilt:
$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right|}{\left|\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4n^2}\right|} = \frac{2n}{3} \to \infty$ für $n \to \infty$, dies ist somit ein Widerspruch zu $(\star)$

10. Gleichmäßige Konvergenz

Entscheiden Sie, ob die folgenden auf $(0, \infty)$ definierten Funktionenfolgen nicht, punktweise oder sogar gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Geben Sie, falls existent, den Grenzwert an.

a) $a_n = x + \frac{1}{n}$

Lösung: Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen $a(x) = x$, da für festes x die Folge $\left(x + \frac{1}{n}\right)$ nach den Rechenregeln für Folgen gegen x strebt. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig, denn unabhängig von x gilt $\forall \varepsilon > 0$:
$|a_n - a| = \left|x + \frac{1}{n} - x\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ falls $n > N := \frac{1}{\varepsilon}$

b) $a_n = \frac{x}{n}$

Lösung: Die Funktionenfolge a_n konvergiert zunächst punktweise gegen die Nullfunktion $a(x) = 0$, da für jedes feste $x > 0$ die Zahlenfolge $\left(\frac{x}{n}\right)$ nach den Rechenregeln für Folgengrenzwerte eine Nullfolge ist. Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig, denn angenommen es gäbe zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, welches nur von ε abhängt, so dass $|a_n(x) - 0| < 1 = \varepsilon\ \forall n > N$. Dann wählt man $n = N + 1$ und $x = N + 2$ (möglich, da es ja für alle $x > 0$ gelten muss) und erhält den Widerspruch
$|a_n(x) - 0| = \left|\frac{N+1}{N+2}\right| > 1 = \varepsilon$

c) $a_n = e^x \cdot \sqrt[n]{e}$

Lösung: Die Funktionenfolge a_n lässt sich umschreiben zu $a_n(x) = e^{x+\frac{1}{n}}$. Nach a) konvergiert $x + \frac{1}{n}$ für festes x gegen x und da die Exponentialfunktion stetig ist, konvergiert damit auch $a_n(x)$ punktweise gegen $a(x) = e^x$ für $n \to \infty$. Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig:

Sei $n > N$. Dann gilt $|a_n(x) - a(x)| = e^x \left|e^{\frac{1}{n}} - 1\right|$

Die rechte Seite der Gleichung ist dabei nicht Null und kann durch Erhöhung von x beliebig groß gemacht werden, so dass sie jedes zuvor gewählte ε übersteigt. Also muss N in Abhängigkeit von x gewählt werden $\Rightarrow$ nur punktweise konvergent

11. Zwischenwertsatz

Zeigen Sie: Ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungeraden Grades besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

Lösung: Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$ und n ungerade, dann sei ohne Einschränkung $a_n > 0$.

Als Polynom ist p stetig. Für $x \neq 0$ gilt:

$$p(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

Der Ausdruck in der Klammer konvergiert für $x \to \pm\infty$ gegen $a_n > 0$. Somit gilt $\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \pm\infty$ (da das n in x^n ungerade ist). Es gibt also ein x_- mit $p(x_-) < 0$ und ein x_+ mit $p(x_+) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in (x_-, x_+)$ mit $p(x_0) = 0$.