TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Übungsblatt 3

Potenzreihen, Exponentialfunktion, Stetigkeit, Konvergenz, Grenzwert

12.03.2014

1. Konvergenzradien von Potenzreihen I

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^4 - 4n^3)x^n$
b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2}x^n$
c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{5n+1}}{1+2^n}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}x^n$

2. Funktionalsgleichung der Exponentialfunktion

Beweisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ mit Hilfe des Cauchy-Produkts:

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w)$$

3. Stetigkeit der Exponentialfunktion

Benutzen Sie die Stetigkeit der Exponentialfunktion, um $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ zu zeigen.

Hinweis: Betrachten Sie hierzu den Grenzwert der Folge $b_n = e^{a_n}$

4. Konvergenzradien von Potenzreihen II

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n,\ \ a \in \mathbb{R}$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^{n^2},\ \ a \in \mathbb{R}$
c) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$
d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(3n)^n \cdot n!}x^n$

5. Sinus, Cosinus

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$
b) $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$
c) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Hinweis: Benutzen Sie bei c) die Exponentialdarstellung

6. Konvergenz von Potenzreihen III

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+3)}{n}\right)^{n^2} x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 7x^{\frac{n}{3}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} x^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} x^n$

7. Stetigkeit

a) Sei $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^s$ stetig ist

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$. Zeigen Sie, dass f stetig ist

8. Gleichmäßige Stetigkeit

Untersuchen Sie, welche der Funktionen gleichmäßig stetig sind:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

b) $f : [10^{-4}, \infty) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f : \left[\sqrt{2}, 6\right] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{x^{2014}-18}{46+|x|^7}$

9. Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) := \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-Stetig ist.

10. Gleichmäßige Konvergenz

Entscheiden Sie, ob die folgenden auf $(0, \infty)$ definierten Funktionenfolgen nicht, punktweise oder sogar gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Geben Sie, falls existent, den Grenzwert an.

a) $a_n = x + \frac{1}{n}$

b) $a_n = \frac{x}{n}$

c) $a_n = e^x \cdot \sqrt[n]{e}$

11. Zwischenwertsatz

Zeigen Sie: Ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungeraden Grades besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.