TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Musterlösung zu Übungsblatt 2

Kartesisches Koordinatensystem, Metrische Räume, Folgen, Reihen

11.03.2014

1. Folgen I

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. auf Divergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert, wobei a_n gegeben ist durch

a) $\frac{(n+3)(2n-1)}{n^2-5}$

Lösung: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)(2n-1)}{n^2-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{1-\frac{5}{n^2}} = 2$

b) $\left(\frac{3+4i}{4}\right)^n$

Lösung: $|a_n| = \left|\left(\frac{3+4i}{4}\right)^n\right| = \left|\frac{3}{4}+i\right|^n = \left(\sqrt{\frac{9}{16}+1}\right)^n = \left(\frac{5}{4}\right)^n > 1$

Die Folge $|a_n|$ divergiert also; somit divergiert die Folge (a_n) selbst

c) $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$

Lösung: $|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(\frac{3+4i}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n\right| = \left|\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n\right| \left|\frac{3+4i}{5} - 1\right|$

$= \left|\frac{3}{5} + i\,\frac{4}{5}\right|^n \left|-\frac{2}{5} + i\,\frac{4}{5}\right| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Die Folge ist also keine Cauchy-Folge, also nicht konvergent. Sie ist divergent.

d) $\left(\frac{3+4i}{6}\right)^n$

Lösung: $|a_n| = \left|\left(\frac{3+4i}{6}\right)^n\right| = \left(\frac{5}{6}\right)^n \to 0$

Damit konvergiert auch die Folge (a_n)

e) $\sqrt{n^2+n} - n$

Lösung: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)\cdot(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$

f) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$

Lösung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 1$

g) $\binom{2n}{n} 2^{-n}$

Lösung: $a_{n+1} = 2^{-(n+1)} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!((2n+2)-(n+1))!} = 2^{-(n+1)} \left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\right) =$

$2^{-n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(2n)!}{(n)!(2n-n)!}\right) \cdot \frac{(2n+1)\cdot 2(n+1)}{(n+1)^2} = a_n \cdot \frac{2n+1}{n+1}$

$\Rightarrow a_{n+1} = a_n\left(1+\frac{n}{n+1}\right) \geq a_n\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2 a_{n-1} \geq \cdots \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n a_1$

Da $a_1 = 1$ folgt $a_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$. Die Folge divergiert also

h) $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Lösung: $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)=\frac{\left(\prod_{k=1}^{n-1}k\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}k\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)^2}=$
$\frac{1}{2}\frac{(n-1)!\cdot(n+1)!}{n!\cdot n!}=\frac{1}{2}\frac{(n+1)}{n}\rightarrow\frac{1}{2}$ („Teleskopprodukt“)

Hinweis: Zeigen Sie bei g) zunächst, dass $a_{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}a_n$ und bei h), dass $a_n=\frac{n+1}{2n}$ ist.

2. Folgen II

Bestimmen Sie den Grenzwert der wie folgt definierten Folgen (a_n):

a) $\frac{n+\sin(n^2)}{n+\cos(n)}$

Lösung: $a_n=\frac{1+\frac{\sin(n^2)}{n}}{1+\frac{\cos(n)}{n}}\rightarrow 1$

b) $\frac{\sin\left(n^2\frac{\pi}{2}\right)}{n}$

Lösung: $0\leq|a_n|\leq\frac{1}{n}\rightarrow 0$ (Einschließungskriterium)

c) $\frac{n+2\sqrt{n}}{3n-\sqrt{n}}$

Lösung: $a_n=\frac{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}{3-\frac{1}{\sqrt{n}}}\rightarrow\frac{1}{3}$

d) $n\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{n}}\right)$

Lösung: $a_n=n\left(\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{n}}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{1-\frac{c}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{c}{n}}}\right)=n\left(\frac{1-\left(1-\frac{c}{n}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{c}{n}}}\right)=\frac{c}{1+\sqrt{1-\frac{c}{n}}}\rightarrow\frac{c}{2}$

e) $\frac{(1+i)n^4-n^3+(2+3i)n}{in^4+2n^2}$

Lösung: $a_n=\frac{(1+i)-\frac{1}{n}+(2+3i)\frac{1}{n^3}}{i+\frac{2}{n^2}}\rightarrow\frac{1+i}{i}=1-i$

f) $\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1}$

Lösung: $a_n=\frac{\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1}\right)}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1}}=\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1}}=\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}-\sqrt{n-\frac{1}{n^2}}}\rightarrow 0$

3. Rekursive Folge

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen sei rekursiv definiert durch $a_0 = 2$ und $a_n = \frac{3}{4-a_{n-1}}$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Lösung: Es gilt:

- $1 \leq a_n \leq 3 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0$ (vollständige Induktion)
  - *Induktionsanfang:* Für $n = 0$ gilt $1 \leq a_0 = 2 \leq 3$
  - *Induktionsvoraussetzung:* Es gelte $1 \leq a_n \leq 3$ bereits für n
  - *Induktionsschritt:* $n \to n+1$

    $$a_{n+1} = \frac{3}{4-a_n}\begin{cases} \leq \frac{3}{4-3} = 3 \\ \geq \frac{3}{4-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq a_{n+1} \leq 3$$
- $a_{n+1} < a_n \;\forall n \in \mathbb{N}$ (vollständige Induktion)
  - *Induktionsanfang:* Für $n = 0$ gilt $a_1 = \frac{3}{4-2} = \frac{3}{2} < 2 = a_0$
  - *Induktionsvoraussetzung:* Es gelte $a_{n+1} < a_n$ bereits für n
  - *Induktionsschritt:* $n \to n+1$

    $$a_{(n+1)+1} = a_{n+2} = \frac{3}{4-a_{n+1}} < \frac{3}{4-a_n} = a_{n+1}$$

Die Folge ist also streng monoton fallend und nach unten beschränkt. Es existiert also ein Grenzwert a.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4-\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}} = \frac{3}{4-a} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 4a + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a \in \left\{2 \pm \sqrt{4-3}\right\} = \{1,3\}$$

Da $a_0 = 2$ und (a_n) monoton fallend, folgt $a = 1$

4. Limes superior/inferior, Häufungspunkte

Bestimmen Sie für die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ den Limes superior, den Limes inferior und alle Häufungspunkte. Finden Sie im Fall der Konvergenz (auch uneigentliche Konvergenz) den Grenzwert.

a) $a_n := (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$

Lösung: $a_{2n} = (-1)^{2n}\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \to 1$ und $a_{2n+1} = (-2)^{2n+1}\frac{2n}{2n+2} = -\frac{2}{2+\frac{2}{n}} \to -1$

1 und -1 sind Gernzwerte von Teilfolgen von (a_n) und damit Häufungspunkte. Es gibt keine weiteren Häufungspunkte, da jede weitere konvergente Teilfolge unendlich viele gerade oder ungerade Indizes hat und somit gegen 1 oder -1 konvergiert. Da 1 größter Häufungspunkt ist, gilt $\limsup a_n = 1$; analog $\liminf a_n = -1$. Da die Folge zwei Häufungspunkte hat, kann sie nicht konvergent sein.

b) $a_n := \sqrt[n]{3^n + ((-1)^n + 1)\cdot 5^n}$

Lösung: Es gilt: $5 = \sqrt[n]{5^n} < \sqrt[n]{3^n + 2\cdot 5^n} < \sqrt[n]{5^n + 2\cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{3} \to 5$

$a_{2n} = \sqrt[2n]{3^{2n} + 2\cdot 5^{2n}} \to 5$ und $a_{2n+1} = \sqrt[n]{3^n} = 3$

Analog zu a) und b) gibt es neben den Häufungspunkten 3 und 5 keine weiteren, also ist $\limsup a_n = 5$ und $\liminf a_n = 3$. Die Folge ist nicht konvergent.

c) $a_n := (-3)^n + ((-1)^n + 1) \cdot 5^n$

Lösung: $a_{2n} = (-3)^{2n} + ((-1)^{2n} + 1)5^{2n} = 3^{2n} + 2 \cdot 5^{2n} \to \infty$ und

$a_{2n+1} = -3^{2n+1} \to -\infty$

Analog zu a) gibt es keine weiteren Häufungspunkte, somit gilt $\limsup a_n = \infty$ und $\liminf a_n = -\infty$. Die Folge ist also nicht konvergent.

5. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz bzw. Divergenz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

Lösung: $a_n := \frac{n^4}{3^n} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^4} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 \to \frac{1}{3} < 1$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe absolut.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Lösung: Sei $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Die Folge (b_n) ist eine monoton fallende, reelle, positive Nullfolge, somit konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{5}{2}}}$

Lösung: Es gilt $|\sin(x)| \leq 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n \sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{5}{2}}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$.

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die gegebene Reihe absolut

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

Lösung: Die Reihe divergiert, da eine divergente Minorante existiert: $\frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

Lösung: Nach dem Archimedischen Axiom existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n_0 \geq |x|$.

Für alle $n \geq n_0$ gilt dann: $\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n+2}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}\right| = \left|\frac{-x^2}{(2n+1)(2n+2)}\right| \leq \frac{|x^2|}{4n^2} \leq \frac{|x^2|}{4n_0^2} \leq \frac{1}{4} < 1$

Daraus folgt mit dem Quotientenkriterium die absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Benutzen Sie bei e) das Archimedische Axiom: $\forall x \in \mathbb{R}\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > x$

6. Werte von Reihen

Bestimmen Sie die Werte der angegebenen Reihen.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$

Lösung: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$

Lösung: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} = 3\left((-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 3\left((-1) + \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = 1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n}$

Lösung: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{7}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

Lösung: $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ Betrachte nun die Partialsumme:

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1-1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2N-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2N-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N-1}\right)$

Somit folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N-1}\right) = \frac{1}{2}$

7. Rekursive Definitionen

a) Zeigen Sie durch Umformung:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Lösung: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)}$

$= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$

b) Beweisen Sie den binomischen Satz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Lösung: Vollständige Induktion

Induktionsanfang: $n = 0$

$(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{-k}$

Induktionsvoraussetzung: Gelte $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ bereits für n.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Zusatzaufgaben

8. Konvergente Folge

Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $s_n := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. Zeigen Sie, dass damit auch $\lim_{n\to\infty} s_n = a$ gilt.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Dann folgt aus der Konvergenz von (a_n), dass ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_i - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $i > N$. Für $n > \max\left\{N, \frac{2}{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{N}|a_i - a|\right)\right\}$ gilt:

$$|s_n - a| = \frac{1}{n}|a_1 + \cdots + a_n - na| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}|a_i - a| + \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n}|a_i - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{(n-N)}{n} \leq \varepsilon$$

9. Aussagen über Folgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\limsup a_n = \infty \;\Leftrightarrow\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht nach oben beschränkt

Lösung: „$\Rightarrow$“ $\limsup a_n = \infty$ heiß, dass es für alle $c \in \mathbb{R}$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n > c$; (a_n) ist also nach oben nicht beschränkt.

„$\Leftarrow$“ Sei $c \in \mathbb{R}$. Gäbe es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > c$, z.B. $n_1, \dots, n_m$, dann wäre $b := \max\{c, a_{n_1}, \dots, a_{n_m}\}$ eine obere Schranke für (a_n), Widerspruch zur Voraussetzung!

Also gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > c$, also $\limsup a_n = \infty$.