TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

# Übungsblatt 2

Kartesisches Koordinatensystem, Metrische Räume, Folgen, Reihen

**11.03.2014**

## 1. Folgen I

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. auf Divergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert, wobei $a_n$ gegeben ist durch

a) $\frac{(n+3)(2n-1)}{n^2-5}$
b) $\left(\frac{3+4i}{4}\right)^n$
c) $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$
d) $\left(\frac{3+4i}{6}\right)^n$
e) $\sqrt{n^2+n}-n$
f) $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$
g) $\binom{2n}{n}2^{-n}$
h) $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

***Hinweis:*** Zeigen Sie bei g) zunächst, dass $a_{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}a_n$ und bei h), dass $a_n=\frac{n+1}{2n}$ ist.

## 2. Folgen II

Bestimmen Sie den Grenzwert der wie folgt definierten Folgen $(a_n)$:

a) $\frac{n+\sin(n^2)}{n+\cos(n)}$
b) $\frac{\sin\left(n^2\frac{\pi}{2}\right)}{n}$
c) $\frac{n+2\sqrt{n}}{3n-\sqrt{n}}$
d) $n\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{n}}\right)$
e) $\frac{(1+i)n^4-n^3+(2+3i)n}{in^4+2n^2}$
f) $\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1}$

## 3. Rekursive Folge

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen sei rekursiv definiert durch $a_0=2$ und $a_n=\frac{3}{4-a_{n-1}}$ für $n\geq 1$. Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

***Hinweis:*** Zeigen Sie zuerst, dass für alle $n\in\mathbb{N}_0$ $1\leq a_n\leq 3$ und $a_{n+1}<a_n$ gilt.

## 4. Limes superior/inferior, Häufungspunkte

Bestimmen Sie für die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ den Limes superior, den Limes inferior und alle Häufungspunkte. Finden Sie im Fall der Konvergenz (auch uneigentliche Konvergenz) den Grenzwert.

a) $a_n \coloneqq (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$
b) $a_n \coloneqq \sqrt[n]{3^n + ((-1)^n + 1) \cdot 5^n}$
c) $a_n \coloneqq (-3)^n + ((-1)^n + 1) \cdot 5^n$

## 5. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz bzw. Divergenz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{5}{2}}}$
d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$
e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

***Hinweis:*** Benutzen Sie bei e) das Archimedische Axiom: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > x$

## 6. Werte von Reihen

Bestimmen Sie die Werte der angegebenen Reihen.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

## 7. Rekursive Definitionen

a) Zeigen Sie durch Umformung:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

b) Beweisen Sie den binomischen Satz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

# Zusatzaufgaben

## 8. Konvergente Folge

Sei $(a_n)$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $s_n \coloneqq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. Zeigen Sie, dass damit auch $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$ gilt.

## 9. Aussagen über Folgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\limsup a_n = \infty \iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht nach oben beschränkt