Aufgabe 1 *Zum warm werden: Komplexe Zahlen - Lehrling*

Bestimmen Sie das komplex Konjugierte, den Betrag und das Argument von

a) $z = 2 - 2i$

Lösung:

$\bar{z} = 2 + 2i$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ (Einheitskreis, ohne Rechnung ersichtlich)

b) $z = -1 + i$

Lösung:

$\bar{z} = -1 + i$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ (Einheitskreis, ohne Rechnung ersichtlich)

c) $z = -1,5i$

Lösung:

$\bar{z} = 1,5i$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = 1,5$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (Einheitskreis, ohne Rechnung ersichtlich)

Aufgabe 2 *Komplexe Zahlen - Novize*

Man bestimme kartesische, polare und Eulersche Darstellung der folgenden Ausdrücke

a) $z = 2 - 2i$

Lösung:

$|z| = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{7\pi}{4} \Longrightarrow z = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$

b) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Lösung:

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$

c) $z = 1,5e^{1,5\pi i}$

Lösung:

$z = 1,5e^{1,5\pi i} = 1,5\left(\cos 1,5\pi + i\sin 1,5\pi\right) = 1,5\left(0 + i\cdot(-1)\right) = -1,5i$

d) $z = -4$

Lösung:

$|z| = 4$, $\varphi = \pi$, $z = -4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4e^{i\pi}$

Aufgabe 3 *Komplexe Zahlen - Adept*

Man zeige: Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge *multipliziert* und die Winkel *addiert*, bei der Division die Beträge *dividiert* und die Winkel *subtrahiert*.

Lösung:

$$z \cdot w = re^{i\varphi} \cdot se^{i\vartheta} = rse^{i(\varphi+\vartheta)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{re^{i\varphi}}{se^{i\vartheta}} = \frac{r}{s}e^{i(\varphi-\vartheta)}$$

Damit bestimme man sofort den Phasenwinkel, Betrag sowie vereinfachte kartesische Darstellung von

a) $z = w^{36} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{36}$

Lösung:

$|w| = 1$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, also $w = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \Longrightarrow \quad z = 1^{36}e^{36\cdot i\frac{\pi}{4}} = e^{9\pi i} = e^{\pi i} = -1 \quad$ also $|z| = 1$, $\varphi = \pi$

b) $z = \frac{3i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$

Lösung:

$$z = \frac{3i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{3e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \overset{\cos=\sin=\frac{\sqrt{2}}{2}}{=} \frac{3}{4}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) \quad \text{also } |z| = \frac{3}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Aufgabe 4 *Komplexe Zahlen - Experte*

a) Bestimmen Sie die 3. Einheitswurzeln

Lösung:

Wir suchen die Lösung (w) für das Problem $z = 1 = w^3$.
Es gibt die triviale Lösung $w_0 = 1 = \cos(0) + i\sin(0) = e^{i\cdot 0\cdot\frac{2\pi}{3}}$
Mit der Formel von Moivre finden wir dann auch sofort die anderen Lösungen in Anlehnung an die letzte Gleichung:
$w_1 = e^{i\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(1\cdot\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$w_2 = e^{i\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Bestimmen Sie die 3. Wurzeln aus $z = -1$

Lösung:

Wir suchen die Lösung (v) für das Problem $z = -1 = v^3$.
Wir wissen: $|z| = |v| = 1$, $\varphi = \pi$. Es gibt zwei Möglichkeiten, wie wir weiter verfahren können. Einerseits können wir stupide die Formel aus der Vorlesung anwendenden. Andererseits wissen wir aus der Vorlesung, wenn wir die Formel genau betrachten, dass wir alle Lösungen des Problems erhalten, indem wir eine Wurzel suchen und sie mit den Einheitswurzeln aus *a*) multiplizieren.

Wir suchen uns die einfachste, nämlich v_1:

$v_1 = -1 = e^{i\pi}$

Jetzt suchen wir uns die anderen Lösungen mit dem Rezept:

$v_2 = v_1 \cdot w_1 = e^{i\pi} e^{i \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$v_0 = v_1 \cdot w_2 = e^{i\pi} e^{i \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{7\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zum Check: $v_1 \cdot w_0 = v_1$

c) Bestimmen Sie alle Lösungen von $v^3 = i$

Lösung:

Wir suchen die Lösung (v) für das Problem $z = i = v^3$.
Analog zu *b*): $|z| = |v| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Entweder wenden wir wieder die Formel von Moivre an (liefert v_0), oder wir raten wieder eine Lösung, was hier leicht möglich ist: $v_2 = -i$. Danach verfahren wir weiter wie oben, indem wir die Einheitswurzeln mit der bekannten Lösung multiplizieren. Das gibt uns:

$v_0 = v_2 \cdot w_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$
$v_1 = v_2 \cdot w_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i\right)$

Bemerkung: Allgemein kann man sich merken, dass man, sobald man die Einheitswurzeln kennt, sofort jedes andere Wurzelproblem der selben Ordnung leicht lösen kann, indem man sich eine Lösung sucht. Am Einheitskreis wird der „Zeiger“ für jede weitere Lösung lediglich um eine Einheitswurzel weitergedreht. Dass das mit dem Weiterdrehen so einfach funktioniert, haben wir in Aufgabe 3 gesehen.
Für Wurzelprobleme, die nicht auf dem Einheitskreis liegen, verwendet man das Problem, das auf dem Einheitskreis liegt und verziert das Ergebnis mit dem richtigen Betrag.

Aufgabe 5 *Komplexe Zahlen - Meister*

Bestimmen Sie die Nullstellen von $z^6 + (2-6i)z^3 - 11 - 2i$.

Hinweise: $\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan(\frac{-4}{3})\right) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Die Lösungen sind keine glatten Zahlen, sie dürfen in Polarform angegeben werden und müssen nur so weit aufgelöst werden, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

Lösung:

Zunächst müssen wir scharf Hinsehen um zu erkennen, dass wir uns mit der Substitution $w = z^3$ und das Leben hier wesentlich erleichtern können. Somit reduzieren wir das Problem auf eine quadratische Gleichung.

$$z^6 + (2-6i)z^3 - 11 - 2i = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad w^2 + (2-6i)w - 11 - 2i = 0$$

Diese können wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen weiterbearbeiten.

$$w_{1,2} = \frac{-(2-6i) \pm \sqrt{(2-6i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11-2i)}}{2 \cdot 1} = -1 + 3i \pm \sqrt{3-4i}$$

Nun müssen wir die Wurzel ω berechnen, die uns die Lösungsformel gegeben hat. Hierbei nutzen wir den ersten Teil des Hinweises aus.
Es ist $|3-4i| = 5$, $\varphi = \arctan(\frac{-4}{3})$. Wir müssen außerdem aus dem Hinweis $\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan(\frac{-4}{3})\right)$ ausrechnen.

$$\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-4}{3}\right)\right) = \sqrt{1^2 - \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{(Pythagoras für sin und cos)}$$

Damit finden wir:

$$\omega^2 = 5\left[\cos\left(\arctan\left(\frac{-4}{3}\right)\right) + i\sin\left(\arctan\left(\frac{-4}{3}\right)\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \omega = \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-4}{3}\right)\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-4}{3}\right)\right)\right] = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + i\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = 2 - i$$

Das liefert uns:

$$w_{1,2} = -1 + 3i \pm (2 - i) \qquad \Longrightarrow \qquad w_1 = 1 + 2i \qquad w_2 = -3 + 4i$$

Nun müssen wir, da wir anfangs substituiert haben, die Substitution rückgängig machen. Das heißt, wir müssen das Problem $w = z^3$ lösen, also die dritten Wurzeln der beiden gefundenen z bestimmen. Dies wird uns die im Hinweis erwähnten unschönen Zahlen liefern. Wir berechnen:

$|w_1| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$, $|w_2| = |-4 + 3i| = 5$, $\varphi_1 = \arctan\left(\frac{2}{1}\right)$, $\varphi_2 = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right)$

Wir müssen jedoch beachten, dass arctan uns bei φ_2 die Lösung im 4. Quadranten ausgibt, wir jedoch eine Zahl im 2. Quadranten haben. Daher ist der richtige Winkel $\varphi_2 = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + \pi$.

Nun schreiben wir die Lösungen mittels Formel von Moivre an:

$$z_1 = \sqrt[6]{5}\left[\cos\left(\frac{\arctan(2)}{3} + 0\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan(2)}{3} + 0\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$z_2 = \sqrt[6]{5}\left[\cos\left(\frac{\arctan(2)}{3} + 1\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan(2)}{3} + 1\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$z_3 = \sqrt[6]{5}\left[\cos\left(\frac{\arctan(2)}{3} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan(2)}{3} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_4 = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + \pi}{3} + 0\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + \pi}{3} + 0\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$z_5 = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + \pi}{3} + 1\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + \pi}{3} + 1\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$z_6 = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + \pi}{3} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + \pi}{3} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Aufgabe 6 *Kompositionen und direkte Beweise*

Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen.

a) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

Lösung:

Es ist zu zeigen, dass $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ gilt.
Wir wissen bereits nach Voraussetzung, dass $g(f(a)) = g(f(a')) \Rightarrow a = a'$
Wende also g auf $f(a) = f(a')$ an. Wir erhalten $g(f(a)) = g(f(a'))$ und hierfür wissen wir bereits: $a = a'$

b) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

Lösung:

Es ist zu zeigen, dass $\forall c \in C \exists b \in B : g(b) = c$
Wir wissen bereits für $g \circ f$: $\forall c \in C \exists a \in A : g(f(a)) = c$
Und damit: $\forall c \in C \exists f(a) \in B : g(f(a)) = c$

c) Geben Sie ein Beispiel (mit Begründung) an, in dem $g \circ f$ bijektiv, aber weder g injektiv noch f surjektiv ist.

Lösung:

$A = B = C = \mathbb{Z}$
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : m \mapsto 2m$
$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : k \mapsto \begin{cases} k/2 & \text{falls k gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Nun sei $g(f(m)) = g(f(n))$, also: $g(2m) = g(2n) \Rightarrow m = n$. Deswegen ist $g \circ f$ injektiv.
$\forall m \in \mathbb{Z} : g(f(m)) = g(2m) = m$, also ist $g \circ f$ surjektiv.
$\Rightarrow g \circ f$ bijektiv
Aber f ist nicht surjektiv, da z.B. 3 kein Urbild hat, und g nicht injektiv, da z.B. $g(1) = g(3) = 0$

Aufgabe 7 *Induktionsbeweis*

Zeigen Sie per Induktion

a) die Gaußsche Summenformel für die Arithmetische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Lösung:

IA: $\sum\limits_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$
IV: gelte $\sum\limits_{k=0}^{n} (k) = \frac{n(n+1)}{2}$ bereits bis n
IS: $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k = \sum\limits_{k=0}^{n} k + (n+1) \overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

b) die Formel für die endliche geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Lösung:

IA: $\sum\limits_{k=0}^{0} a^0 = 1 = \frac{a^{0+1}-1}{a-1}$
IV: gelte $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ bereits bis n
IS: $\sum\limits_{k=0}^{n+1} a^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} \overset{IV}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+(a-1)a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Aufgabe 8 *Äquivalenz*

Es sei $x \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Genau dann wenn x gerade ist, so ist auch x^2 gerade.
Hinweis: Es ist günstig, direkten oder indirekten Beweis zu verwenden.

Lösung:

1. x gerade $\Rightarrow x^2$ gerade
Direkt: x hat Darstellung der Form $x = 2n$
$x^2 = (2n)^2 = 2 \cdot 2n^2$, dies ist eine gerade Zahl

2. x gerade $\Leftarrow x^2$ gerade
Indirekt: Zeige: x nicht gerade $\Rightarrow x^2$ nicht gerade.
x hat Darstellung der Form $x = 2n + 1$
$x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, dies ist eine ungerade Zahl

Aufgabe 9 *Direkter Beweis*

Zeigen Sie: Ist die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar, so ist die Zahl selbst durch 3 teilbar.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst eine geeignete Darstellung einer Zahl und teilen Sie diese dann geschickt auf.

Lösung:

Wir können eine Zahl a folgendermaßen darstellen:
$a = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k = 9 \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \underbrace{11\ldots1}_{\text{k Einsen}} + \sum_{k=0}^{n} a_k$
Hier sehen wir sofort: Der erste Summand ist immer durch 3 teilbar, der zweite Summand stellt die Quersumme dar. Also ist die Zahl a genau dann durch 3 teilbar, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist.

Zusatzaufgaben

Aufgabe 10 *Gruppen*

Gegeben ist die Gruppe $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ mit einer Verknüpfung $\times$. Über die Verknüpfungstafel von G sei bekannt:

$\times$	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Die Tabelle ist so zu lesen: Zeile $\times$ Spalte = Eintrag. Bestimmen Sie die restlichen Felder mit Hilfe der Gruppenaxiome.

Lösung:

$\times$	a	b	c	x	y	z
a	11	8	12	1	c	b
b	14	x	z	1	3	14
c	6	y	7	1	4	3
x	1	1	1	x	1	1
y	10	8	9	1	5	2
z	14	a	13	1	x	14

(a) Reihenfolge der Einträge

$\times$	a	b	c	x	y	z
a	x	z	y	a	c	b
b	y	x	z	b	a	c
c	z	y	x	c	b	a
x	a	b	c	x	y	z
y	b	c	a	y	z	x
z	c	a	b	z	x	y

(b) Fertige Tabelle

1. Offensichtlich ist x das Neutrale, somit lassen sich die Spalte und Zeile mit x gleich ausfüllen.
2. y und z sind invers zueinander
3. $a \times y = c \Rightarrow a \times y \times z = c \times z = a$ und $a \times z = b \Rightarrow a \times z \times y = b \times y = a$
4. $b \times c = z \Rightarrow b \times (c \times y) = z \times y = x \Rightarrow (c \times y) = b$
5. Abgeschlossenheit: jedes Element muss in jeder Zeile genau 1 mal auftauchen

Den Rest kann man zunächst nach dem Sudoku-Prinzip füllen:
6. z muss in Zeile 3, aber in Spalte 3 steht schon eines
7. Abgeschlossenheit: jedes Element muss in jeder Zeile genau 1 mal auftauchen
8. z muss in Spalte 2, jedoch in Zeile 5 ist schon eines, analog: c muss in Spalte 2, jedoch in Zeile 1 ist bereits eines
9. a muss in Zeile 5, aber in Spalte 1 ist schon eines. 10. Abgeschlossenheit: jedes Element muss in jeder Zeile genau 1 mal auftauchen
11. x muss in Zeile 1, jedoch in der 3. Spalte ist schon eines
12., 13. Abgeschlossenheit: jedes Element muss in jeder Zeile genau 1 mal auftauchen

Nun haben wir noch 4 Felder frei, die mit c und y zu befüllen sind. Die Sudoku-Variante kann uns hier nicht helfen, wir können uns jedoch der Assoziativiät bedienen, bspw. so:

14. $z \times z = (c \times a) \times (c \times a) = c \times (a \times c) \times a = c \times (y \times a) = c \times b = y$
Die anderen Felder ergeben sich entweder analog, oder wieder mit dem Sudoku-Prinzip.

Aufgabe 11 *Körper*

Geben Sie den kleinsten Körper an, den man konstruieren kann. Es werden also sowohl die Elemente als auch die zwei Operationen gesucht.
Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Elemente Sie unbedingt brauchen und auf was Sie verzichten können. Wenn Sie diese haben, können Sie sich leicht Operationen (mit den geforderten Eigenschaften) überlegen, mit denen Sie keine neuen Elemente erzeugen, sondern sich innerhalb der Elemente bewegen, die Sie schon haben.

Lösung:

Wir brauchen unbedingt die Neutralen. Wir nennen diese 0 und 1. Die Neutralen haben die Eigenschaft, dass sie selbstinvers sind, das heißt, wir brauchen keine neuen Inversen suchen. Weitere Elemente sind überflüssig.
Nun zu den Operationen. Wir können hier die „normale“ Multiplikation verwenden, es ist aber üblich die Modulo-2-Multiplikation zu nehmen, da in allen anderen sog. Primkörpern $\mathbb{Z}_p$ (mit p Primzahl) bei $p > 2$ nur noch die Modulo-p-Multiplikation die Abgeschlossenheit gewährleistet.
Bei der Addition bleibt uns nur die Modulo-2-Addition.
Gesucht war also: $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2, \otimes_2)$

$\otimes_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

(a) Mod-2-Multiplikation

$\oplus_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

(b) Mod-2-Addition

Abbildung 1: Logische Tabellen

Aufgabe 12 *'Ne Menge Mengen*

a) Zeigen Sie: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Lösung:

„$\Rightarrow$“ Zeige: $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

$$\left.\begin{aligned} x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \subseteq B \vee x \in B, \text{ also: } (A \cup B) \subseteq B \\ x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B), \text{ also: } B \subseteq (A \cup B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \cup B = B$$

„$\Leftarrow$“ Zeige: $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B = B$ Also ist jedes Element von A in B, also ist $A \subseteq B$

Wir haben beide Richtungen der Implikation gezeigt. Daraus folgt die Behauptung.

b) Zeigen Sie die de Morganschen Regeln:
$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$
$X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$

Lösung:

$$\begin{aligned} x \in X\backslash(A \cup B) &\Longleftrightarrow x \in X \wedge x \notin (A \cup B) \\ &\Longleftrightarrow x \in X \wedge (x \notin A \wedge X \notin B) \\ &\Longleftrightarrow (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \notin B) \\ &\Longleftrightarrow x \in (X\backslash A) \cap (X\backslash B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in X\backslash(A \cap B) &\Longleftrightarrow x \in X \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\Longleftrightarrow x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\Longleftrightarrow (x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B) \\ &\Longleftrightarrow x \in (X\backslash A) \cup (X\backslash B) \end{aligned}$$