Andreas Wörfel

Aufgabe 1 *Zum warm werden: Komplexe Zahlen - Lehrling*

Bestimmen Sie das komplex Konjugierte, den Betrag und das Argument von

a) $z = 2 - 2i$

b) $z = -1 + i$

c) $z = -1,5i$

Aufgabe 2 *Komplexe Zahlen - Novize*

Man bestimme kartesische, polare und Eulersche Darstellung der folgenden Ausdrücke

a) $z = 2 - 2i$

b) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $z = 1,5e^{1,5\pi i}$

d) $z = -4$

Aufgabe 3 *Komplexe Zahlen - Adept*

Man zeige: Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge *multipliziert* und die Winkel *addiert*, bei der Division die Beträge *dividiert* und die Winkel *subtrahiert.*

Damit bestimme man sofort den Phasenwinkel, Betrag sowie vereinfachte kartesische Darstellung von

a) $z = w^{36} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{36}$

b) $z = \frac{3i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$

Aufgabe 4 *Komplexe Zahlen - Experte*

a) Bestimmen Sie die 3. Einheitswurzeln

b) Bestimmen Sie die 3. Wurzeln aus $z = -1$

c) Bestimmen Sie alle Lösungen von $v^3 = i$

Aufgabe 5 *Komplexe Zahlen - Meister*

Bestimmen Sie die Nullstellen von $z^6 + (2-6i)z^3 - 11 - 2i$.

Hinweise: $\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\arctan(\frac{-4}{3})\right) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Die Lösungen sind keine glatten Zahlen, sie dürfen in Polarform angegeben werden und müssen nur so weit aufgelöst werden, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

Aufgabe 6 *Kompositionen und direkte Beweise*

Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen.

a) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

b) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

c) Geben Sie ein Beispiel (mit Begründung) an, in dem $g \circ f$ bijektiv, aber weder g injektiv noch f surjektiv ist.

Aufgabe 7 *Induktionsbeweis*

Zeigen Sie per Induktion

a) die Gaußsche Summenformel für die Arithmetische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) die Formel für die endliche geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Aufgabe 8 *Äquivalenz*

Es sei $x \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Genau dann wenn x gerade ist, so ist auch x^2 gerade.
Hinweis: Es ist günstig, direkten oder indirekten Beweis zu verwenden.

Aufgabe 9 *Direkter Beweis*

Zeigen Sie: Ist die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar, so ist die Zahl selbst durch 3 teilbar.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst eine geeignete Darstellung einer Zahl und teilen Sie diese dann geschickt auf.

Zusatzaufgaben

Aufgabe 10 *Gruppen*

Gegeben ist die Gruppe $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ mit einer Verknüpfung $\times$. Über die Verknüpfungstafel von G sei bekannt:

×	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Die Tabelle ist so zu lesen: Zeile $\times$ Spalte = Eintrag. Bestimmen Sie die restlichen Felder mit Hilfe der Gruppenaxiome.

Aufgabe 11 *Körper*

Geben Sie den kleinsten Körper an, den man konstruieren kann. Es werden also sowohl die Elemente als auch die zwei Operationen gesucht.
Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Elemente Sie unbedingt brauchen und auf was Sie verzichten können. Wenn Sie diese haben, können Sie sich leicht Operationen (mit den geforderten Eigenschaften) überlegen, mit denen Sie keine neuen Elemente erzeugen, sondern sich innerhalb der Elemente bewegen, die Sie schon haben.

Aufgabe 12 *'Ne Menge Mengen*

a) Zeigen Sie: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

b) Zeigen Sie die de Morganschen Regeln:
$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$
$X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$