Lineare Algebra Ferienkurs – Probeklausur

Lösungsvorschlag – philipp.gadow@mytum.de

Aufgabe 1

Stellen Sie $p = x^2 - 4x - 3$

als Linearkombination der Vektoren

$$p_1 = x^2 - 2x + 5$$

$$p_2 = 2x^2 - 3x$$

$$p_3 = x + 1$$

dar.

Wir stellen p, p_1, p_2, p_3 bezüglich der Basis $(1, x, x^2)$ in Koordinaten dar:

$$p = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad p_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{11}\right) \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{11} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{28}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad p = -\frac{1}{11} p_1 + \frac{6}{11} p_2 - \frac{28}{11} p_3$$

Die Menge $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} (M = p_1, p_2)$ spannt

$$M = \left(\operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right)$$ auf

$M = \{p_1, p_2, p_3\}$ ist eine Basis von $P[x]_2$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ hat

vollen Rang $\rightarrow$ die Vektoren sind linear unabhängig.

Aufgabe 2:

$$A_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a) $\operatorname{Ker} A_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

LGS auf ZSF mit Gauß

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 35 & 28 & 35 \\ -35 & -20 & 45 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -35 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{Ker} A_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 7x_3 \wedge x_2 = -10x_3 \right\}$

$$\operatorname{Ker} A_A = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

b) Aus a): $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ hat Rang 2

Die ersten zwei Spaltenvektoren der Matrix sind linear unabhängig und bilden so eine Basis des Bilds von A_A

Bild $A_A = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$

c) A_A ist nicht injektiv, da Kern $A_A \neq \{0\}$.

A_A ist nicht surjektiv, da die Dimension des Urbildraums kleiner als die Dimension des Bildraums ist.

Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 8 \\ 8 & 10 & 8 \\ 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Eigenwerte bestimmen

$$\det(A - E_3\lambda) = \begin{pmatrix} 10-\lambda & 8 & 8 \\ 8 & 10-\lambda & 8 \\ 8 & 8 & 10-\lambda \end{pmatrix} = (10-\lambda)^3 + 2\cdot 8^3 - 3\cdot 8^2(10-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 30\lambda^2 - 300\lambda + 1000 + 1024 - 1920 + 192\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 30\lambda^2 - 108\lambda + 104$$

$$= -(\lambda - 2)^2(\lambda - 26)$$

$\boxed{\lambda_{1,2} = 2}$ mit $\mu(P_A, 2) = 2$

$\boxed{\lambda_3 = 26}$ mit $\mu(P_A, 26) = 1$

b) Eigenräume bestimmen

$$\mathrm{Eig}(A;2) = \mathrm{Kern}\,(A-2E_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also $\mathrm{Eig}(A;2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$

$x_3 = -x_1 - x_2$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1-x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A;2) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathrm{Eig}(A;26) = \mathrm{Kern}\,(A-26E_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 8 & -16 & 8 \\ 8 & 8 & -16 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = x_3$

$x_1 = -x_2 + 2x_3 = -x_3 + 2x_3 = x_3$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A;26) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

c)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dann ist $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}$

$$= T^{-1} A T$$

Aufgabe 4

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

a) zu zeigen: E ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$

Beweis:

UV0: $E \neq \emptyset$ da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ wegen $0+0+0=0$

UV1: $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in E \Rightarrow v + w = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \in E$

da $x_1+x_2+x_3=0$, $y_1+y_2+y_3=0$ $\Rightarrow$ $x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3 = \underbrace{x_1+x_2+x_3}_{=0} + \underbrace{y_1+y_2+y_3}_{=0} = 0$

ist auch $v+w \in E$

UV2: $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E \Rightarrow \lambda \cdot v \in E$

da $x_1+x_2+x_3=0$ ist auch $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3$
$= \lambda \underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{=0} = 0$

Damit ist gezeigt: E ist ein Untervektorraum

b) Bestimmen Sie eine Basis von E

Für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ in E gilt, dass $x_1+x_2+x_3=0$.

$\Rightarrow x_3 = -(x_1+x_2)$, also $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -(x_1+x_2) \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Basisvektoren von E:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 5

$B := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots \right)$

z.z.: $\langle f | g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$ ist Skalarprodukt

Beweis: Skalarprodukt ist positiv definite, symmetrische Bilinearform

Seien $f, g, h \in V$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

Aus der Linearität des Integrals folgt

$$\langle f+g | h \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) + g(x))\, h(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x)\, h(x) + g(x)\, h(x))\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, h(x)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx\, g(x)\, h(x)$$

$$= \langle f | h \rangle + \langle g | h \rangle$$

$$\langle \alpha f | g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha f(x)\, g(x)\, dx = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \alpha \langle f | g \rangle$$

Multiplikation von Funktionen ist kommutativ in $\mathbb{R}$

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\, f(x)\, dx = \langle g | f \rangle$$

Für $f \neq 0$: $\quad \langle f | f \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)^2\, dx > 0$

$\Rightarrow$ $\langle \, | \, \rangle$ ist Skalarprodukt auf V

Aufgabe 6

$$B := \left(\underset{b_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}} \right)$$

$$C := \left(\underset{c_1}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{c_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{c_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \right)$$

a) Koordinaten von b_1, b_2, b_3 bezüglich Basis C

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \underset{c_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} + (-1) \underset{c_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}} + 1 \underset{c_1}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$$

$$b_{1/C} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot \underset{c_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} + (-1) \underset{c_1}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$$

$$b_{2/C} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot c_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_{3/C} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

b) Basiswechselmatrix

$${}_E[id]_B = \underset{\uparrow b_1\ \uparrow b_2\ \uparrow b_3}{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}$$

$${}_E[id]_C = \underset{\uparrow c_1\ \uparrow c_2\ \uparrow c_3}{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}} \Rightarrow {}_C[id]_E = \left({}_E[id]_C\right)^{-1} = \begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

also ${}_C[id]_B = {}_C[id]_E \, {}_E[id]_B$

$$= \begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 7

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Laplace - Entwicklung

$\det A = 42$

b) Zu zeigen: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$, A invertierbar

Beweis: A invertierbar $\Rightarrow \det A \neq 0$, also ist $\frac{1}{\det A}$ definiert.

$$1 \overset{\text{det ist normiert}}{=} \det(E_n) \overset{\text{inverses Element}}{=} \det(A^{-1}A) \overset{\text{Produktregel}}{=} \det(A^{-1}) \cdot \det(A)$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

Technische Universität München, Fakultät für Physik

Ferienkurs - Lineare Algebra

Philipp Gadow

07. März 2014

V Probeklausur

6

Aufgabe 1 - Linearkombinationen 6

Drücken Sie das Polynom

$$p = x^2 - 4x - 3$$

4

als Linearkombination der Vektoren

$$p_1 = x^2 - 2x + 5, p_2 = 2x^2 - 3x \text{ und } p_3 = x + 1$$

aus. Welchen Raum spannt die Menge $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(M = p_1, p_2)$ auf? 1

Ist die Menge $M = \{p_1, p_2, p_3\rangle$ eine Basis von $P[X]_2$? 1

Aufgabe 2 - Lineare Abbildung (Kern und Bild) 7 13

Sei $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, die durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

definiert werde.

a) Geben Sie Ker f_A an. 3

b) Geben Sie Rang f_A und eine Basis von Bild f_A an. 2

c) Untersuchen Sie, ob die Abbildung injektiv oder surjektiv ist. 2

Aufgabe 3 - Eigenwerte 8 21

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 8 \\ 8 & 10 & 8 \\ 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A 3

b) Bestimmen Sie die Eigenräume zu den Eigenwerten λ_i von A. 4

c) Geben Sie eine Transformationsmatrix Matrix $T \in M(n \times n; \mathbb{R})$ an, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist mit $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. 1

Aufgabe 4 - Untervektorraum 5 26

Im $\mathbb{R}^3$ ist die Menge

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass E ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist. 3

b) Bestimmen Sie eine Basis von E. 2

Aufgabe 5 - Skalarprodukt 4 30

Sei $B := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\right)$ und $W := \text{span}_{\mathbb{R}} B$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums der stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$.
Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum definiert ist.

→ biliner 2
Symm 1
pos.def. 1

$${}_E[id]_B = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

35

Aufgabe 6 - Basiswechsel

5

Gegeben seien die beiden Basen

$${}_E[id]_C = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$B := (b_1, b_2, b_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right)$$

und

$$C := (c_1, c_2, c_3) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right)$$

$${}_C[id]_E = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von b_1, b_2, b_3 bezüglich der Basis C. 3

b) Geben Sie die Basiswechselmatrix ${}_C[id]_B$ an. 2

Aufgabe 7 - Determinanten

5

40

a) Berechnen Sie $\det A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3

$${}_C[id]_B = {}_C[id]_E \, {}_E[id]_B = \begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass für eine invertierbare Matrix A gilt

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

2

Viel Erfolg!