Technische Universität München, Fakultät für Physik

Ferienkurs - Lineare Algebra

Philipp Gadow

07. März 2014

V Probeklausur

Aufgabe 1 - Linearkombinationen

Drücken Sie das Polynom

$$p = x^2 - 4x - 3$$

als Linearkombination der Vektoren

$$p_1 = x^2 - 2x + 5, p_2 = 2x^2 - 3x \text{ und } p_3 = x + 1$$

aus. Welchen Raum spannt die Menge $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(M = p_1, p_2)$ auf?
Ist die Menge $M = \{p_1, p_2, p_3\rangle$ eine Basis von $P[X]_2$?

Aufgabe 2 - Lineare Abbildung (Kern und Bild)

Sei $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, die durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

definiert werde.

a) Geben Sie Ker f_A an.

b) Geben Sie Rang f_A und eine Basis von Bild f_A an.

c) Untersuchen Sie, ob die Abbildung injektiv oder surjektiv ist.

Aufgabe 3 - Eigenwerte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 8 \\ 8 & 10 & 8 \\ 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A

b) Bestimmen Sie die Eigenräume zu den Eigenwerten λ_i von A.

c) Geben Sie eine Transformationsmatrix Matrix $T \in M(n \times n; \mathbb{R})$ an, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Aufgabe 4 - Untervektorraum

Im $\mathbb{R}^3$ ist die Menge

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass E ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von E.

Aufgabe 5 - Skalarprodukt

Sei $B := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\right)$ und $W := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} B$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums der stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$.
Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum definiert ist.

Aufgabe 6 - Basiswechsel

Gegeben seien die beiden Basen

$$B := (b_1, b_2, b_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$C := (c_1, c_2, c_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von b_1, b_2, b_3 bezüglich der Basis C.

b) Geben Sie die Basiswechselmatrix ${}_C[id]_B$ an.

Aufgabe 7 - Determinanten

a) Berechnen Sie $\det A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass für eine invertierbare Matrix A gilt

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

.

Viel Erfolg!