# LINEARE ALGEBRA

## Ferienkurs

**Hanna Schäfer**
**Philipp Gadow**

# INHALT

# KAPITEL 1

# EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

## 1.1 Basiswechsel

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum mit zwei Basen $A = (v_1, \ldots, v_n)$ und $B = (w_1, \ldots w_n)$. Jeder Vektor $w_j$ aus $B$ hat eine eindeutige Darstellung in der Basis $A$

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} v_i$$

Die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $A$ nach $B$ [1] ist

$$S_B^A := (S)_{ij} \in \mathrm{GL}(n, K).$$

Die Transformationsmatrix kann invertiert werden und $(S_B^A)^{-1}$ beschreibt dann die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $B$ nach $A$ [2].
Wir definieren die Koordinatensysteme $\Phi_A : K^n \to V$ und $\Phi_B : K^n \to V$. Die Transformationsmatrix der Koordinaten von $A$ nach $B$ ist

$$T_B^A = (\Phi_B)^{-1} \circ \Phi_A : K^n \to K^n \quad T_B^A \in \mathrm{GL}(n, K).$$

[1]ein Basisvektor in $A$ wird reingesteckt, ein Basisvektor in $B$ kommt raus
[2]ein Basisvektor in $B$ wird reingesteckt und heraus kommt ein Basisvektor in $A$





Sei $u$ ein Vektor des Vektorraumes $V$. $x$ sind die Koordinaten von $u$ in der Basis $A$. $y$ sind die Koordinaten von $u$ in der Basis $B$

$$u = \Phi_A(x) = \Phi_B(y).$$

Der Zusammenhang von der Darstellung in Koordinaten bezüglich der Basis $B$ dargestellt durch die Koordinaten des Vektors in der Basis $A$ ist gegeben durch

$$y = T_B^A x.$$

Die Transformationsmatrizen des Basiswechsels und die Transformationsmatrizen des Koordinatensystemwechsls hängen zusammn über

$$T_B^A = (S_B^A)^{-1} \qquad S_B^A = T_A^B.$$

Ein Endomorphismus $F : V \to V$ werde bezüglich der Basen $A$ und $B$ dargestellt. Dann transformiert die Darstellung von der Basis $A$ in Basis $B$

$$M_B = T_B^A M_A (T_B^A)^{-1}.$$

Sowohl Spur

$$\mathrm{Spur}(F) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

als auch Determinante

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

sind Invarianten von Endomorphismen, ändern sich also nicht beim Wechsel von einer Basis in die andere. So kann die Determinante eines Endomorphismus $F$ definiert werden über die Determinante dessen Darstellung bezüglich einer beliebigen Basis $B$

$$\det F := \det M_B(F).$$

## 1.2 Eigenwertgleichung

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert* von $F$, falls es ein $v \in V$ gibt mit $v \neq 0$ und

$$F(v) = \lambda v$$

. $v \neq 0 \in V$ heißt Eigenvektor, wenn es ein $\lambda \in K$ gibt, so dass

$$F(v) = \lambda v.$$

Der Vektor $\vec{0}$ ist nie ein Eigenvektor. Vielfache von Eigenvektoren sind wieder Eigenvektoren, da $F(\mu v) = \lambda \cdot \mu v, \mu \in K$.
Für $V = K^n$, $A \in M(n \times n; K)$ und einen Endomorphismus $F : V \to V, x \mapsto Ax$ gilt: $\lambda \in K$ ist Eigenwert von $A$, wenn es ein $x \in K^n$ gibt mit $x \neq 0$ und

$$Ax = \lambda x.$$

$x$ ist dann ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$.

### Eigenraum

Der Eigenraum eines Endomorphismus $F$ von $V$ zum Eigenwert $\lambda\, inK$ ist definiert als

$$\mathrm{Eig}(F;\lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\} \subset V.$$

Für die Eigenräume von zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt

$$\mathrm{Eig}(F;\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(F;\lambda_2) = \{0\}$$

Sind $v_1, v_2 \in V$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist der Vektor $(v_1 + v_2)$ kein Eigenvektor von $F$.
Für eine Matrix $A \in M(n \times n; K)$ ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda \in K$ definiert als

$$\mathrm{Eig}(A;\lambda) := \{v \in V : Ax = \lambda x\} \subset K^n.$$

**Eigenschaften des Eigenraums**

a) $\mathrm{Eig}(F;\lambda) \subset V$ ist ein Untervektorraum

b) $\mathrm{Eig}(F;\lambda) \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von $F$

c) $\mathrm{Eig}(F;\lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda$.

d) $\mathrm{Eig}(F;\lambda) = \mathrm{Ker}(F - \lambda \mathrm{id}_V)$

e) $\dim \mathrm{Eig}(F;\lambda) = \dim V - \mathrm{rang}(F - \lambda \mathrm{id}_V)$

### Berechnung von Eigenwerten

Sei $A \in M(n \times n; K)$, $\lambda \in K$. $\lambda$ ist genau dann ein Eigenwert von $A$, wenn

$$\det(A - \lambda E_n) = 0.$$

### Berechnung von Eigenvektoren

Ein Vektor $x \in K^n$ ist ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn es eine nichttriviale [3] des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E_n)x = 0$$

ist.

### Charakteristisches Polynom

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum der Dimension $\dim V = n$ mit Basis $B$, $F : V \to V$ ein Endomorphismus mit Darstellung bezüglich $B$ $M_B = A \in M(n \times n; K)$. Das charakteristische Polynom von $F$ ist definiert als

$$P_F = \det(A - XE_n) \in K[X]$$

[3]nichttrivial: $\vec{x} \neq 0$



und ist ein Polynom vom Grad $n$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte von F. Wir geben explizit das charakteristische Polynom für $n = 2$ und $n = 3$ an und diskutieren Eigenschaften für allgemeines $n \in \mathbb{N}$.

1.) n=2

$$\begin{aligned}\det(A - XE_n) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - X & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - X \end{pmatrix} \\ &= X^2 - (a_{11} + a_{22})\, X + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\end{aligned}$$

2.) n=3

$$\begin{aligned}\det(A - XE_3) &= \det(a_{ij} - X\delta_{ij}) \\ &= -X^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})X^2 \\ &\quad - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{33} \\ &\quad - a_{13}a_{31} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\, X \\ &\quad + \det A\end{aligned}$$

3.) $n \in \mathbb{N}$

$$P_A = \det(A - XE_n) = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots + b_1 X_1 + b_0.$$

Alle $b_n \in K$. Für den Koeffizienten der höchsten Potenz von $X$ gilt $b_n = (-1)^n$. Für den Koeffizienten der zweithöchsten Potenz von $X$ gilt

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1}\ \mathrm{Spur}\ (A) = (-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn}).$$

Für den Koeffizienten des konstanten Teil des Polynoms gilt $b_0 = \det A$.

Allgemein lässt sich ein charakteristisches Polynom schreiben als

$$P_F = (X - \lambda_1) \cdot \ldots (X - \lambda_m) \cdot Q$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ den Nullstellen von $P_F$ und $Q \in K[X]$ einem Polynom ohne Nullstellen in $K$. Es ist $0 \leq m \leq n = \dim\, V$ und $m + \deg\, Q = n$.
Es kann vorkommen, dass das charakteristische Polynom $P_F$ mehrfache Nullstellen hat, d.h.

$$P_F = (X - \lambda_1)^{r_1} \cdot \cdots \cdot (X - \lambda_k)^{r_k} \cdot Q$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Es ist $r_1, \ldots, r_k \geq 1$ und $r_1 + \ldots r_k = m$.
Ist $F : V \to V$ diagonalisierbar, so zerfällt das char. Polynom $P_F$ in Linearfaktoren

$$P_F = \pm(X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und $n = \dim\, V$.
Ist $\dim\, V = n$, $F : V \to V$ und

$$P_F = \pm(X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_n)$$

mit *paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, so ist $F$ diagonalisierbar.
Eigenvektoren $v_1 \ldots, v_m \in V$ einer linearen Abbildung $F : V \to V$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sind stets linear unabhängig. Dabei ist $m \leq \dim\, V$.

### Geometrische und Algebraische Vielfachheit

*Algebraische Vielfachheit* Die algebraische Vielfachheit $\mu(P_F;\lambda)$ des Eigenwerts $\lambda$ von $F$ ist definiert als die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda$ des charakteristischen Polynoms $P_F$ zu $F$.

*Geometrische Vielfachheit* Die geometrische Vielfachheit $d(F;\lambda)$ des Eigenwerts $\lambda$ von $F$ ist definiert als

$$d(F;\lambda) := \dim \operatorname{Eig}(F;\lambda)$$

Die geometrische Vielfachheit $d(F;\lambda)$ ist die maximale Zahl linear unabhängiger Eigenvektoren zu $\lambda \in K$.
Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $F$, so ist $d(F;\lambda) \geq 1$ und $\mu(P_F;\lambda) \geq 1$.
Ist für einen Eigenwert $\lambda \in K$ das charakteristische Polynom dieses Eigenwerts $P_F(\lambda) \neq 0$, hat das charakteristische Polynom also keine Nullstelle bei $\lambda$ und ist demnach die algebraische Vielfachheit $\mu(P_F;\lambda) = 0$. $\lambda$ ist dann kein Eigenwert von $F$, also ist auch $d(F;\lambda) = 0$.
Für jeden Eigenwert $\lambda$ von $F$ gilt

$$1 \leq d(F;\lambda) \leq \mu(P_F;\lambda) \leq \dim V.$$

## 1.3 Diagonalisierbarkeit

Wann kann ein Endomorphismus durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden?
Sei $V$ ein $K$-Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$. Ein Endomorphismus $F: V \to V$ heißt diagonalisierbar, wenn $V$ eine Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ besitzt, die aus Eigenvektoren von $F$ besteht. Dann gibt es zu jedem $v_i$ ein $\lambda_i\ inK$, sodass $F(v_i) = \lambda_i v_i$.

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Eine Matrix $A \in M(n \times n; K)$ heißt diagonalisierbar, wenn $F_A : K^n \to K^n, x \mapsto Ax$ diagonalisierbar ist. Dann existiert eine Transformationsmatrix $S \in \mathrm{GL}(n;K)$, sodass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Mantra für symmetrische Matrizen:** Ist $A\ inM(n \times n; K)$ symmetrisch ($A =^t A$, so zerfällt das charakteristische Polynom $P_A$ in reelle Linearfaktoren. $A$ hat dann reelle Eigenwerte und je zueinander orthogonale Eigenvektoren und ist diagonalisierbar.

Sei $F: V \to V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren

$$P_F = \pm(X - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (X - \lambda_n)$$



mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ zerfällt, dann ist $F$ diagonalisierbar. Die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_m$ eines Endomorphismus $F: V \to V$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sind stets linear unabhängig, wobei $m \leq \dim V$.
Die Bedingung für Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen kann auch mit Hilfe der geometrischen und algebraischen Vielfachheit der Eigenwerte formuliert werden: Sei $V$ ein $K$-Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$. Ein Endomorphismus $F: V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn

a) Das charakteristische Polynom $P_F$ zerfällt in $K[X]$ in Linearfaktoren

$$P_F = \pm(X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

b) Für jeden Eigenwert $\lambda$ von $F$ ist die geometrische Vielfachhit des Eigenwerts gleich dessen algebraischer Vielfachheit

$$d(F;\lambda) = \mu(P_F;\lambda).$$

Vergleicht man die Form des charakteristischen Polynoms in diesem Fall mit der allgemeinen Form eines charakteristischen Polynoms

$$P_F = (X - \lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (X - \lambda_k)^{r_k} \cdot Q,$$

sieht man dass $r_1 = \dots = r_n = 1$ ist, alle Eigenwerte haben also die algebraische Vielfachheit $\mu(P_F;K) = 1$. Mit $1 \leq d(F;\lambda) \leq \mu(P_F;\lambda) = 1$ folgt $d(F;\lambda) = 1$.

### Rechenverfahren zur Diagonalisierung

1. Charakteristisches Polynom aufstellen
2. algebraische Vielfachheiten ablesen
3. Eigenräume berechnen (LGS aufstellen und lösen)
4. geometrische Vielfachheiten ablesen
5. Eigenvektoren berechnen
6. Transformationsmatrix aus Eigenvektoren aufstellen
7. Transformationsmatrix invertieren
8. Diagonalmatrix angeben

$$D = SAS^{-1} \qquad A = S^{-1}DS$$

### Ähnlichkeit

Wir diagonalisieren einen Endomorphismus, indem wir einen Basiswechsel zu einer Basis aus Eigenvektoren vornehmen, in welcher die darstellende Matrix des Endomorphismus diagonal ist.
Wir erinnern uns an den Basiswechsel für einen Endomorphismus:
Ein Endomorphismus $F : V \to V$ werde bezüglich der Basen $A$ und $B$ dargestellt, wobei B eine Basis aus Eigenvektoren von $F$ ist. Dann transformiert die Darstellung von $F$ von der Basis $A$ in Basis $B$

$$M_B = T_B^A M_A (T_B^A)^{-1}.$$

In diesem Fall besteht die Spalten Matrix aus $(T_B^A)^{-1}$ aus den Eigenvektoren von $A$.
Mit folgendem Beispiel für $n = 3$ demonstrieren wir, wieso dann die Matrix $A$ Diagonalgestalt als Diagonalmatrix $D$ annimmt.
Wir benennen der Übersicht halber die Transformationsmatrix, welche aus den Eigenvektoren besteht, also der Basis in die wir von der kanonischen Basis transformieren, $T = (v_1, v_2, v_3)$ mit den Eigenvektoren von $F$ $v_1, v_2, v_3$.
Es ist dann

$$D = T^{-1}AT.$$

Für die Diagonalmatrix $D$ gilt natürlich, wenn wir das Bild des kanonischen Einheitsvektors $e_1 =^t (1, 0, 0)$ betrachten

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun verifizieren wir, dass das Bild des kanonischen Einheitsvektors unter $T^{-1}AT$ das gleiche wie eben berechnet ist. In $T$ stehen die Eigenvektoren von $A$ als Spalten der Transformationsmatrix.

$$T^{-1}ATe_1 = T^{-1}A(v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T^{-1}Av_1 = T^{-1}\lambda_1 v_1$$

Hier haben wir benutzt, dass $v_1$ der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1$ von $A$ ist. So wie $T$ den ersten kanonischen Einheitsvektor $e_1$ in $v_1$ transformiert hat, so transformiert $T^{-1}$ diesen wieder zurück, sodass wir als Ergebnis erhalten

$$T^{-1}ATe_1 = \lambda_1 T^{-1} v_1 = \lambda_1 e_1.$$

Wir haben also die Gültigkeit der Identität

$$D = T^{-1}AT$$

gezeigt[4].

[4]Nicht von der Notation verwirren lassen! In der Matrix ganz rechts stehen die Eigenvektoren von $A$ als Spalten, egal ob man sie jetzt $T$ oder $S^{-1}$ nennt.



## 1.4 Trigonalisierung

Nicht immer ist es möglich einen Endomorphismus oder eine Matrix zu diagonalisieren. Zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren, aber

$$d(F; \lambda) \neq \mu(P_F; \lambda),$$

so ist $F$ nicht diagonalisierbar. Es ist aber möglich eine der Darstellungsmatrix ähnliche Matrix in oberer Dreiecksform anzugeben. Diese Matrix in oberer Dreiecksform hei"st *Jordan-Normalform (JNF)* und die Abbildung ist dann trigonalisierbar.

### Jordan-Normalform

Die einfachste Form, in der diese obere Dreiecksmatrix angegeben werden kann, ist die Jordan-Normalform.
Existiert zu einem Endomorphismus $F : V \to V$ eine Basis $B$, in der die darstellende Matrix

$$M_B(F) = J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_k \end{pmatrix}$$

annimmt mit Jordan-Kästchen $J_1, \ldots, J_k$, so nennt man die Matrix $J$ eine Jordan-Normalform von $F$.
Eine Matrix $J_l$ hei"st Jordan-Kästchen zu einem $\lambda \in K$, wenn

$$J_l = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus und $\dim V < \infty$. Zerfällt $P_F$ in Linearfaktoren, so ist $F$ trigonalisierbar und es gibt eine Basis $B$ von $V$, in der die darstellende Matrix eine Jordan-Normalform von $F$ ist.
Die Anzahl der Jordan-Kästchen zu einem Eigenwert $\lambda$ ist die geometrische Vilfachheit $d(F; \lambda)$ des Eigenwerts $\lambda$. In einem Jordan-Kästchen ist nur der Vektor ein Eigenvektor von $F$, dessen Bild die erste Spalte vom Jordan-Kästchen ist.

## 1.5 Zusatzmaterial

Ein sehr gutes Vorlesungsvideo zu Eigenwerten und Eigenvektoren gibt es bei MIT Open Course Ware.
`http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures/lecture-21-eigenvalues-and-eigenvectors/`

## AUFGABEN

**1.1** Sei

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: $F$ hat den Eigenvektor $e =^t (1, 1, 1, 1)$.

b) Geben Sie alle Eigenwerte von $F$ an. Dazu brauchen Sie nicht das charakteristische Polynom von $F$ auswerten.

c) Ermitteln Sie die Potenzen $F^k$ von $F$ für $k \in \mathbb{N}$.

**1.2** Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n; \mathbb{R}).$$

**1.3** Es sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M(n \times n; K)$ symmetrisch mit den zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Zeigen Sie, dass für jeden Eigenvektor $v_1$ zum Eigenwert $\lambda_1$ und jeden Eigenvektor $v_2$ zum Eigenwert $\lambda_2$ gilt:

$${}^t v_1 \cdot v_2 = 0$$

**1.4** Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8i & 2i \\ -5i & -3i \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie $\det A$, Spur $A$, Rang $A$, sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A$.

**1.5** Zeigen Sie: Ist $\det A = 0$ , so ist $0 \in K$ ein Eigenwert von $A$. Was folgt daraus für Rang und Invertierbarkeit von $A$?
*Hinweis: Wie lautet die allgemeine Form des charakteristischen Polynoms? Sie dürfen im zweiten Teil der Frage annehmen, dass $A$ diagonalisierbar ist.*

**1.6** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{C}).$$

a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von $A$.

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $A$.

c) Bestimmen Sie den Eigenwert $\lambda_1$ von $A$ zum Eigenvektor ${}^t(-1, 1)$.

d) Bestimmen Sie die Menge $M$ aller Eigenwerte von $A$.



**1.7** Zeigen Sie, dass eine hermitesche Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ (d.h. $({}^t\bar{A}) = A$) nur reelle Eigenwerte hat.
Zeigen Sie au"serdem, dass die Eigenvektoren $v_i \in \mathbb{C}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ zueinander orthogonal sind, also ${}^t v_i \cdot \bar{v}_j = 0$ für $i \neq j$.

**1.8** Beantworten Sie folgende Fragen jeweils mit einer kurzen Begründung:

a) Gegeben ist ein Eigenvektor $v$ zum Eigenwert $\lambda$ einer Matrix $A$. Ist $v$ auch Eigenvektor von $A^2$? Zu welchem Eigenwert? Wenn $A$ zudem invertierbar ist, ist dann $v$ auch ein Eigenvektor zu $A^{-1}$? Zu welchem Eigenwert?

b) Wieso hat jede Matrix $A \in M(n \times n; K)$ mit $A^2 = E_n$ einen der Eigenwerte $\pm 1$ und keine weiteren?

c) Haben ähnliche Matrizen dieselben Eigenwerte? Haben diese dann gegebenenfalls auch dieselben algebraischen und geometrischen Vielfachheiten?

d) Haben die quadratischen $n \times n$-Matrizen $A$ und ${}^tA$ dieselben Eigenwerte? Haben diese gegebenenfalls auch dieselben algebraischen und geometrischen Vielfachheiten?

e) Gegeben sei eine nilpotente Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ mit Nilpotenzindex $p \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt

$$A^p = 0 \quad \text{und} \quad A^{p-1} \neq 0$$

Ist die Matrix $A$ invertierbar? Begründen Sie weiterhin: Die Matrix $A$ hat einen Eigenwert der Vielfachheit $n$.

**1.9** Sei $A \in M(n \times n; K)$ eine diagonalisierbare Matrix. Zeigen Sie, dass

a)

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

gilt, wobei $\lambda_i, \forall i = 1, \ldots n$ die Eigenwerte von $A$ sind.

b)

$$\text{Spur } A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

gilt, wobei $\lambda_i, \forall i = 1, \ldots n$ die Eigenwerte von $A$ sind.

*Hinweis: Matrizen innerhalb der Spur vertauschen zyklisch: Spur $(ABC)$ = Spur $(CAB)$ = Spur $(BCA)$.*

**1.10** Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

**1.11** Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**1.12**

a) Die Zeilensummen von $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ seien alle gleich, d.h. es gibt ein $\lambda \in K$ mit $\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie (ohne Benutzung des charakteristischen Polynoms), dass $\lambda$ Eigenwert von $A$ ist und finden Sie einen zugehörigen Eigenvektor.

b) Bestimmen Sie eine zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ähnliche Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3; \mathbb{C}$.

*Hinweis: Benutzen Sie a), um einen reellen Eigenwert zu finden. Die Transformationsmatrix ist nicht gefragt.*

**1.13** Begründen Sie, warum die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

orthogonal diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Transformationsmatrix $T$, so dass $D :=^t TAT$ diagonal ist.

**1.14** Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie jeweils kurz die Antworten:

a) Eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwert 0 ist invertierbar.

b) Wenn $Ax = \lambda x$ und $Bx = \mu x$ gilt, dann ist $\mu\lambda$ ein Eigenwert von AB.

c) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$.

d) Ist 1 ein Eigenwert von $A^2$, so ist 1 auch ein Eigenwert von $A$.

e) Seien $A, B \in M(n \times n; K)$ diagonalisierbar und $\lambda \in K$ ein Eigenwert zu $AB$, dann ist $\lambda$ auch ein Eigenwert zu $BA$.