IV Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) zu zeigen: A hat den Eigenvektor $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beweis: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e = {}^t(1,1,1,1)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$.

b) Geben Sie alle Eigenwerte von A an.

Die Matrix A ist singulär ($\det A = 0$).
Somit ist $\lambda_2 = 0$ ein weiterer Eigenwert.

Wegen $\text{Rang } A = 1 = \text{Rang}(F - 0 \cdot \mathbb{1})$ ist die geom. Vielfachheit des Eigenwerts 0 gleich $4-1=3$.
Wegen der Symmetrie von A (symmetrische Matrix!) ist dies auch die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts von A.

Damit sind alle Eigenwerte bestimmt.

c) Ermitteln Sie alle Potenzen von F F^k für $k \in \mathbb{N}$.

mit a) erhält man

$$F^2 = F \cdot F = F\underbrace{(e,e,e,e)}_{F} = (Fe, Fe, Fe, Fe)$$

$$= (4e, 4e, 4e, 4e) = 4F$$

Durch Iteration folgt weiter $F^3 = F^2 F = 4F \cdot F = 4F^2 = 16F$,

allgemein $F^k = 4^{k-1} F$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne Eigenwerte:

$\det A = 4 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

$\operatorname{Spur} A = 4 = \lambda_1 + \lambda_2$

$\longrightarrow$ char. Polynom $x^2 - \operatorname{Spur} A\, x + \det A$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \overset{!}{=} 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies (\lambda - 2)^2 = 0$

Somit ist $\lambda = 2$ Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2.

Berechne Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \overset{\lambda=2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{Z2 \leftarrow Z1 - Z2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(normiert: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

Jeder Vektor aus $M = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \}$ ist ein Eigenvektor zu A.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, $A \in M(n \times n; K)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine symmetrische Matrix, also ${}^tA = A$.

Zu zeigen: Für zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt für jeden Eigenvektor v_1 zum EW λ_1 und v_2 zum EW λ_2:

$${}^tv_1 \cdot v_2 = 0 .$$

Beweis: Seien λ_1, λ_2 verschiedene Eigenwerte einer symmetrischen Matrix $A \in M(n \times n; K)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sei v_1 Eigenvektor zu λ_1 und v_2 Eigenvektor zu λ_2.

$$\lambda_1 \, ({}^tv_1 \cdot v_2) = {}^t(\lambda_1 v_1)\, v_2 = {}^t(A v_1)\, v_2 = {}^tv_1 \, {}^tA \, v_2$$

$$\overset{{}^tA = A}{=} {}^tv_1 \, A \, v_2 = {}^tv_1 \, (A v_2) = {}^tv_1 \, (\lambda_2 v_2) = \lambda_2 \, ({}^tv_1 \cdot v_2) .$$

Da v_1, v_2 Eigenvektoren sind, ist $v_1, v_2 \neq 0$.

Da nach Voraussetzung $\lambda_1 \neq \lambda_2$, muss $({}^tv_1 \cdot v_2) = 0$.

Aufgabe 4

$$A = \begin{pmatrix} 8i & 2i \\ -5i & -3i \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie det A, Spur A, Rang A, sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

- $\det A = (8i \cdot (-3i)) - (-5i \cdot (2i))$ $\quad (i^2 = -1)$

  $= 24 - 10 = 14$ $\quad \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad (\lambda_1 \lambda_2$ EW von $A)$

- $\text{Spur } A = 8i - 3i = 5i$ $\quad \text{spur } A = \lambda_1 + \lambda_2$ (EW von A)

- $\text{Rang } A = 2$

$$\begin{pmatrix} 8i & 2i \\ -5i & -3i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 40 & 10 \\ -40 & -24 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0{,}25 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte

  charakteristisches Polynom $\quad X^2 - \text{Spur } A \; X + \det A$
  (für 2x2-Matrizen)

$$X^2 - 5i\,X + 14 = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = +\frac{5}{2}i \pm \sqrt{-\frac{25}{4} - \frac{56}{4}} = +\frac{5}{2}i \pm \frac{9}{2}i$$

$$\boxed{\lambda_1 = -2i} \qquad \boxed{\lambda_2 = +7i}$$

Probe: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = (-2i) \cdot (+7i) = 14 = \det A$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -2i + 7i = 5i = \text{Spur } A$

- Eigenvektoren

zu $\lambda_1 = -2i$

$$\begin{pmatrix} 8i - (-2i) & 2i \\ -5i & -3i - (-2i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10i & 2i \\ -5i & -i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 5x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = -5x_1$$

Eigenvektor $\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}}$
(wähle $x_1 = 1$)

zu $\lambda_2 = +7i$

$$\begin{pmatrix} 8i - (7i) & 2i \\ -5i & -3i - (7i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 2i \\ -5i & -10i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_1 = 2x_2$$

(wähle $x_2 = 1$) $\qquad \boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 5

zu zeigen: Ist $\det A = 0$, so ist $\lambda = 0 \in K$ ein Eigenwert von A.

Beweis: Die allgemeine Form des charakteristischen Polynoms lautet

$$P_A = \det(A - X E_n) = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0$$

mit $b_n = (-1)^n$, $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{Spur} A$, $b_0 = \det A$.

Ist $\det A = 0$ nach Voraussetzung, so ist

$$P_A = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X$$
$$= X \cdot (b_n X^{n-1} + b_{n-1} X^{n-2} + \dots + b_1)$$

Laut Vorlesung ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda E_n) = 0$.

Wie eben durch Ausfaktorisieren gezeigt, ist dies gleich

$$\lambda \cdot (b_n \lambda^{n-1} + b_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + b_1) = 0$$

$\Rightarrow$ erfüllt für $\lambda = 0$. Somit ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A.

Wir nehmen an, dass A diagonalisierbar ist.
Dann existiert eine zu A ähnliche Matrix D

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0$ Eigenwerten von A.

Wir sehen, dass D nicht vollen Rang (sondern $\operatorname{Rang} D < n$) hat und somit auch nicht invertierbar ist.

Da Rang und Invertierbarkeit einer Matrix Invarianten sind (sich beim Basiswechsel nicht ändern), hat auch A nicht vollen Rang und ist nicht invertierbar.

Bemerkung: Daher heißt eine Matrix mit $\det A = 0$ singulär.

$\left[\det A = 0 \Rightarrow A \text{ ist nicht invertierbar.} \right]$

Aufgabe 6

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$ (Bemerkung: A ist symmetrisch)

a) Spur $A = 2i$ — Spur $A = \lambda_1 + \lambda_2$

det $A = i \cdot i - (-1)\cdot(-1) = -1 - 1 = -2$ — det $A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

b) charakteristisches Polynom für 2x2 - Matrizen

$$P_A = x^2 - \text{Spur } A \; x + \det A$$

$$P_A = x^2 - 2i\,x - 2$$

c) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 von A zum Eigenvektor $^t(-1,1)$

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i-1 \\ 1+i \end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert $\lambda_1 = 1+i$ — Probe: $(1+i)^2 - 2i(1+i) - 2$
$= 1 + 2i - 1 - 2i + 2 - 2 = 0$ ✓

d) Bestimmen Sie die Menge M aller Eigenwerte von A.

entweder das übliche $\det(A - X E_n) = 0$

oder, da $\lambda_1 = 1+i$ schon bekannt Polynomdivision:

$$\lambda^2 - 2i\lambda - 2 : (\lambda - (1+i)) = \lambda + (1-i)$$

$$-\left(\lambda^2 - \lambda(1+i)\right)$$

$(\lambda - i\lambda = (1-i)\lambda) \Rightarrow$ $\lambda - i\lambda - 2$

$$-\left(\underbrace{(1-i)\lambda}_{=\lambda - i\lambda} - \underbrace{(1+i)(1-i)}_{=2}\right)$$

$$0$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = (\lambda - (1+i)) \cdot \underbrace{(\lambda + (1-i))}_{\lambda - (-1+i)}$$

Menge der Eigenwerte $M = \{ (1+i), (-1+i) \}$

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass eine hermitesche Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ nur reelle Eigenwerte hat.

Beweis: Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ,

so gilt wegen $A = {}^t\overline{A}$ und $Av = \lambda v \Leftrightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$

$$\lambda\,({}^t\overline{v} \cdot v) = {}^t\overline{v}\,\lambda v = {}^t\overline{v}\,(Av) = ({}^t\overline{v}\,{}^t\overline{A})v = {}^t(\overline{A}\,\overline{v})\;v$$
$$= \overline{\lambda}\;({}^t\overline{v} \cdot v)$$

$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$, also ist λ reell.

Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren $v_i \in \mathbb{C}$ zu den Eigenwerten $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ zueinander orthogonal sind.

zu zeigen: ${}^tv_i \cdot v_j = 0$ für $i \neq j$.

Beweis: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ verschiedene Eigenwerte einer hermiteschen Matrix A, ${}^tA = \overline{A}$, sowie v_1 Eigenvektor zu λ_1 und v_2 Eigenvektor zu Eigenwert λ_2.

$$\lambda_1\,({}^tv_1 \cdot \overline{v_2}) = {}^t(\lambda_1 v_1) \cdot \overline{v_2} = {}^t(A \cdot v_1) \cdot \overline{v_2}$$
$$= {}^tv_1 \cdot {}^tA \cdot \overline{v_2} \overset{A \text{ hermitesch}}{=} {}^tv_1 \cdot (\overline{A} \cdot \overline{v_2}) = {}^tv_1\,(\overline{\lambda_2}\,\overline{v_2}) = \overline{\lambda_2}\,({}^tv_1 \cdot \overline{v_2})$$

Da nach Voraussetzung $\lambda_1 \neq \lambda_2$, muss gelten

$$v_1 \cdot v_2 = {}^tv_1 \overline{v_2} = 0.$$

Aufgabe 8

a) $Av = \lambda v$. Dann ist
$$A^2 v = A \cdot (A \cdot v) = A \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot (A \cdot v) = \underline{\lambda^2}\,v.$$

$Av = \lambda v \quad | \; A^{-1} \cdot$

$\Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E_n} v = \lambda A^{-1} v$. Dann ist $A^{-1} v = \underline{\lambda^{-1}}\,v$.

b)

Diagonalisierbarkeit

Aufgabe 9

Sei $A \in M(n \times n; K)$ eine diagonalisierbare Matrix.

zu zeigen: $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ mit Eigenwerten von A λ_i, $i=1,\dots,n$

Da A diagonalisierbar ist, existiert eine zu A ähnliche Matrix D in Diagonalform $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Es ist $D = S^{-1} A S$.

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det D = \det(S^{-1} A S) = \det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S$$

$$= \det \underbrace{(S^{-1} S)}_{E_n} \cdot \det A = \underbrace{\det E_n}_{=1} \cdot \det A = \det A .$$

Wir haben benutzt, dass $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
und dass für die Verknüpfung '$\cdot$' im Körper $a \cdot b = b \cdot a$.

zu zeigen: $\operatorname{Spur} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Wir beginnen wieder mit der Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, für die gilt $D = S^{-1} A S$.

So ist $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Spur}(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \operatorname{Spur}(S^{-1} A S)$$

zyklische Vertauschung
$$= \operatorname{Spur}(\underbrace{S S^{-1}}_{E_n} A) = \operatorname{Spur} A$$

Aufgabe 10

Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

charakteristisches Polynom

$$P_A(\lambda) = \det(M - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ c & a-\lambda & b \\ 0 & c & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a-\lambda)^3 - 2bc(a-\lambda) = (a-\lambda) \cdot ((a-\lambda)^2 - 2bc)$$

$\Rightarrow$ In jedem Fall ist $\lambda = a$ ein Eigenwert von M.

Fallunterscheidung

a) $bc < 0$; Dann hat $(a-\lambda)^2 - 2bc$ keine reelle Nullstelle,

M also nur einen Eigenwert. M ist dann nicht reell diagonalisierbar.

b) $bc = 0$; Dann hat a die algebraische Vielfachheit 3.

weitere Fallunterscheidung

- $b = c = 0$: $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ bereits in Diagonalform, also diagonalisierbar.

- $b = 0, c \neq 0$: $M - aE_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ hat Rang 2,

  der Eigenwert a hat also geometrische Vielfachheit $3-2=1$ und M ist nicht reell diagonalisierbar.

- $b \neq 0, c = 0$: $M - aE_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat Rang 2,

  der Eigenwert a hat also die geometrische Vielfachheit $3-2=1$ und M ist nicht reell diagonalisierbar.

c) $bc > 0$; Dann hat M drei verschiedene reelle Eigenwerte

$\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + \sqrt{2bc}$, $\lambda_3 = a - \sqrt{2bc}$

und M ist reell diagonalisierbar.

Aufgabe 11

Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 9\lambda - 18$$

Für Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $P_A(\lambda) = 0$.

In Linearfaktoren ist

$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)\cdot(\lambda - 3)\cdot(\lambda + 3)$

Eigenwerte sind also: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

Diese sind paarweise verschieden, somit ist A diagonalisierbar.

Berechnung der Eigenvektoren

- Eigenvektor zu $\lambda_1 = -3$ aus

$$\text{Kern} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

da $x_3 = 0$
$x_1 = -x_2$
wähle $x_2 = 1$

- Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$ aus

$$\text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

da $x_1 = -x_2$
$x_3 = 3x_1 - 2x_2$
wähle $x_2 = -1$

- Eigenvektor zu $\lambda_3 = 3$ aus

$$\text{Kern} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

da $x_3 = 0$
$x_1 = x_2$
wähle $x_1 = 1$

Somit erhalten wir bezüglich der Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

die Darstellungsmatrix von $A: x \mapsto Ax$

$$_B[A]_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12

a) Die Zeilensummen von $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ seien alle gleich, d.h.
$\exists \lambda \in K$ mit $\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n$

z.z.: λ ist Eigenwert von A

Beweis: Für den Vektor ${}^t(1, 1, \dots, 1) \in K^n$ gilt nach Voraussetzung

$$Av = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v = \lambda v$$

, d.h. v ist Eigenvektor zum Eigenwert λ.

b) Nach a) hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

den Eigenwert 3. Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) + 4$$
$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 6$$
$$= -(\lambda-3)\ (\lambda^2-\lambda+2)$$

$\Rightarrow$ Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = \frac{(1+\sqrt{7}i)}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{(1-\sqrt{7}i)}{2}$$

Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{7}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{7}i}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ ist orthogonal diagonalisierbar, da A symmetrisch ist $({}^tA = A)$.

Eigenwerte berechnen:

$$\det(A - \lambda E_3) = (5-\lambda)^2(2-\lambda) - 4 - 4$$
$$- \left((2-\lambda) + 4(5-\lambda) + 4(5-\lambda) \right)$$
$$= (25 - 10\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 8 - (2-\lambda) - 8(5-\lambda)$$
$$= 50 - 20\lambda + 2\lambda^2 - 25\lambda + 10\lambda^2 - \lambda^3 - 8 - 2 + \lambda - 40 + 8\lambda$$
$$= -\lambda^3 + \underbrace{12}_{\text{spur } A}\lambda^2 - 36\lambda + \underbrace{0}_{\det A} \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$$\lambda_{2,3} = +\frac{12}{2} \pm \sqrt{36 - 36} = 6 \quad \text{(alg. Vielfachheit 2)}$$

Eigenvektoren berechnen

- $\lambda_1 = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad x_2 = -2x_3$, $\quad 2x_1 = -x_2$ $\quad$ wähle $x_3 = 1$ $\rightarrow$ $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_{2,3} = 6$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = 2x_2 - x_3$

wähle $x_2 = 1,\ x_3 = 0$ $\quad v_3'' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

wähle $x_2 = 0,\ x_3 = 1$ $\quad v_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir normieren die Eigenvektoren

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allerdings sind v_2', v_3'' noch nicht orthogonal.

$v_2' \cdot v_3'' = -2 \neq 0.$

Wir verwenden das Gram-Schmidt-Verfahren: $\quad v_3' = v_3'' - \frac{\langle v_2' | v_3'' \rangle}{\| v_2' \|} v_2'$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normiert ist dann

$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Transformationsmatrix T ist also

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14

a) Eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwert 0 ist invertierbar.

FALSCH! $\lambda = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A$ nicht invertierbar

b) $Ax = \lambda x$; $Bx = \mu x \Rightarrow \mu\lambda$ ist Eigenwert von AB

WAHR! $ABx = A(\mu x) = \mu(Ax) = \underbrace{\mu\lambda}_{\text{EW von } AB} x$

c) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 2 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$

FALSCH! Entweder ausrechnen oder $\det A = 2 \neq 9 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

oder $\operatorname{Spur} A = 3 \neq 10 = \lambda_1 + \lambda_2$.

Die echten Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

d) Ist 1 ein Eigenwert von A^2, so ist 1 auch ein Eigenwert von A.

FALSCH! Gegenbeispiel $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A, B \in M(n \times n; K)$ diagonalisierbar, $\lambda \in K$ Eigenwert zu AB

$\Rightarrow \lambda$ ist auch Eigenwert zu BA

WAHR!

$$BA(Bx) = B(ABx) \overset{ABx = \lambda x}{=} B(\lambda x) = \lambda Bx$$

und $Bx \neq 0$. Daher ist Bx Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ.