Technische Universität München, Fakultät für Physik

Ferienkurs - Lineare Algebra

Philipp Gadow

06. März 2014

IV Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwertgleichung

$$Ax = \lambda x \qquad x \neq 0$$

charakteristisches Polynom

$$P_A = \det(A - XE_n) = b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X_1 + b_0$$

- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot$ Spur $(A) = (-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn})$
- $b_0 = \det A$

Berechnung von Eigenwerten

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

Algebraische ung geometrische Vielfachheit

- Algebraische Vielfachheit $\mu(P_F; \lambda)$ des Eigenwerts λ von F: Vielfachheit der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms P_F zu F.
- Geometrische Vielfachheit $d(F; \lambda)$ des Eigenwerts λ von F:

  $$d(F; \lambda) := \dim \operatorname{Eig}(F; \lambda)$$

  (maximale Zahl linear unabhängiger Eigenvektoren zu $\lambda \in K$)

  $$1 \leq d(F; \lambda) \leq \mu(P_F; \lambda) \leq \dim V$$

Diagonalisierbarkeit

Ein Endomorphismus $F : V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn

a) Das charakteristische Polynom P_F zerfällt in $K[X]$ in Linearfaktoren

$$P_F = \pm(X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

b) Für jeden Eigenwert λ von F ist die geometrische Vielfachhit des Eigenwerts gleich dessen algebraischer Vielfachheit

$$d(F; \lambda) = \mu(P_F; \lambda).$$

Eine symmetrische Matrix ist immer diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten und zueinander orthogonalen Eigenvektoren.

Rechenverfahren zur Diagonalisierung

1. Charakteristisches Polynom aufstellen
2. algebraische Vielfachheiten ablesen
3. Eigenräume berechnen (LGS aufstellen und lösen)
4. geometrische Vielfachheiten ablesen
5. Eigenvektoren berechnen
6. Transformationsmatrix aus Eigenvektoren aufstellen $S^{-1} = (v_1, \ldots, v_n)$.
7. Transformationsmatrix invertieren $\left(S^{-1}\right)^{-1} = S$
8. Diagonalmatrix angeben

$$D = SAS^{-1} \qquad A = S^{-1}DS$$

Aufgaben

Eigenwerte und Eigenvektoren

Aufgabe 1

Sei

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: F hat den Eigenvektor $e =^t (1, 1, 1, 1)$.

b) Geben Sie alle Eigenwerte von F an. Dazu brauchen Sie nicht das charakteristische Polynom von F auswerten.

c) Ermitteln Sie die Potenzen F^k von F für $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n; \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M(n \times n; K)$ symmetrisch mit den zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Zeigen Sie, dass für jeden Eigenvektor v_1 zum Eigenwert λ_1 und jeden Eigenvektor v_2 zum Eigenwert λ_2 gilt:

$$^t v_1 \cdot v_2 = 0$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8i & 2i \\ -5i & -3i \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie $\det A$, Spur A, Rang A, sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Aufgabe 5

Zeigen Sie: Ist $\det A = 0$, so ist $0 \in K$ ein Eigenwert von A. Was folgt daraus für Rang und Invertierbarkeit von A?
Hinweis: Wie lautet die allgemeine Form des charakteristischen Polynoms? Sie dürfen im zweiten Teil der Frage annehmen, dass A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 6

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{C}).$$

a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A.

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

c) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 von A zum Eigenvektor ${}^t(-1, 1)$.

d) Bestimmen Sie die Menge M aller Eigenwerte von A.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass eine hermitesche Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ (d.h. $({}^t\bar{A}) = A$) nur reelle Eigenwerte hat.
Zeigen Sie außerdem, dass die Eigenvektoren $v_i \in \mathbb{C}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_i \in \mathbb{C}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ zueinander orthogonal sind, also ${}^t v_i \cdot \bar{v}_j = 0$ für $i \neq j$.

Aufgabe 8

Beantworten Sie folgende Fragen jeweils mit einer kurzen Begründung:

a) Gegeben ist ein Eigenvektor v zum Eigenwert λ einer Matrix A. Ist v auch Eigenvektor von A^2? Zu welchem Eigenwert? Wenn A zudem invertierbar ist, ist dann v auch ein Eigenvektor zu A^{-1}? Zu welchem Eigenwert?

b) Wieso hat jede Matrix $A \in M(n \times n; K)$ mit $A^2 = E_n$ einen der Eigenwerte ± 1 und keine weiteren?

c) Haben ähnliche Matrizen dieselben Eigenwerte? Haben diese dann gegebenenfalls auch dieselben algebraischen und geometrischen Vielfachheiten?

d) Haben die quadratischen $n \times n$-Matrizen A und ${}^tA$ dieselben Eigenwerte? Haben diese gegebenenfalls auch dieselben algebraischen und geometrischen Vielfachheiten?

e) Gegeben sei eine nilpotente Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ mit Nilpotenzindex $p \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt

$$A^p = 0 \quad \text{und} \quad A^{p-1} \neq 0$$

Ist die Matrix A invertierbar? Begründen Sie weiterhin: Die Matrix A hat einen Eigenwert der Vielfachheit n.

Diagonalisierbarkeit

Aufgabe 9

Sei $A \in M(n \times n; K)$ eine diagonalisierbare Matrix. Zeigen Sie, dass

a)
$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$
gilt, wobei $\lambda_i, \forall i = 1, \dots n$ die Eigenwerte von A sind.

b)
$$\text{Spur } A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$
gilt, wobei $\lambda_i, \forall i = 1, \dots n$ die Eigenwerte von A sind.

Hinweis: Matrizen innerhalb der Spur vertauschen zyklisch: Spur $(ABC) =$ *Spur* $(CAB) =$ *Spur* (BCA).

Aufgabe 10

Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist die reelle Matrix
$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 11

Diagonalisieren Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12

a) Die Zeilensummen von $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ seien alle gleich, d.h. es gibt ein $\lambda \in K$ mit $\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie (ohne Benutzung des charakteristischen Polynoms), dass λ Eigenwert von A ist und finden Sie einen zugehörigen Eigenvektor.

b) Bestimmen Sie eine zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ähnliche Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3; \mathbb{C}$.

Hinweis: Benutzen Sie a), um einen reellen Eigenwert zu finden. Die Transformationsmatrix ist nicht gefragt.

Aufgabe 13

Begründen Sie, warum die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

orthogonal diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T, so dass $D :=^t TAT$ diagonal ist.

Aufgabe 14

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie jeweils kurz die Antworten:

a) Eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwert 0 ist invertierbar.

b) Wenn $Ax = \lambda x$ und $Bx = \mu x$ gilt, dann ist $\mu\lambda$ ein Eigenwert von AB.

c) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$.

d) Ist 1 ein Eigenwert von A^2, so ist 1 auch ein Eigenwert von A.

e) Seien $A, B \in M(n \times n; K)$ diagonalisierbar und $\lambda \in K$ ein Eigenwert zu AB, dann ist λ auch ein Eigenwert zu BA.