LINEARE ALGEBRA

Ferienkurs

Hanna Schäfer
Philipp Gadow

INHALT

KAPITEL 1

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME UND DETERMINANTEN

1.1 Lineare Gleichungssysteme

Eine Gleichung der Form f(x) = b mit linearem f heisst lineare Gleichung. Ein lineares Gleichungssystem (LGS) hat die Form
$a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + ... + a_{1n} * x_n = b_1$
$a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + ... + a_{2n} * x_n = b_2$
...
$a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + ... + a_{mn} * x_n = b_m$
mit $x_1, ..., x_n$ den Unbekannten, die zu bestimmen sind; die Koeffizienten a_{ij}, sowie die b_i sind aus dem Körper K (hierzunÄchst K = R). Dies lÄsst sich auch folgendermassen schreiben:
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = bi$
Die Lösungsmenge des Systems schreibt man als:
$L := (x_1, ..., x_n) \in Knmit(??)$
In einem LGS darf man folgende Äquivalenzumformungen durchführen, ohne dass sich die Lösungsmenge verÄndert:

1. 2 Gleichungen vertauschen
2. Eine Gleichung auf beiden Seiten mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren
3. Ein beliebiges Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren

Diese Umformungen sind zulÄssig, da sie ohne Informationsverlust rückgängig zu machen sind (Äquivalenz).

LGS in Matrix-Form

Es ist oft übersichtlicher, das LGS in Form einer Matrix zu schreiben:
$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ Es handelt sich in diesem Fall um eine mxn-Matrix, wobei m die Anzahl der Zeilen und n die der Spalten angibt (man kann sich merken ZVS = Zeile vor Spalte), und man schreibt $A \in K^{mxn}$, mi K^{mxn} der Menge aller mxn-Matrizen mit EintrÄgen aus K. Das LGS wird also zu Ax=b, mit $A \in K^{mxn}$, $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in Kn$ und $b = (b_i)_{1 \leq i \leq m} \in K^m$. Dabei bezeichnet man b als InhomogenitÄt des LGS. Das LGS heisst demnach homogen, wenn b=0, also wenn $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, ansonsten ist es inhomogen. Eine sehr nützliche Schreibweise ist die sogenannte erweiterte Koeffizientenmatrix:
(A—b)=

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

mit (A—b) $\in K^{mxn+1}$

Gauss-Algorithmus

Wie bei den LGS kann man bei Matrizen elementare Zeilenumformungen machen, und zwar die oben erwähnten Äquivalenzumformungen (Die Zeilen entsprechen den einzelnen Gleichungen des LGS). Dies ermöglicht die Anwendung des Gauss-Algorithmus, mit dem sich jede Matrix in sogenannte Zeilenstufenform bringen lÄsst. Die Elemente am Kopf jeder Stufe werden Pivotelemente genannt und sind ungleich 0 (wäre dies nicht der Fall, so müsste die Stufe nach rechts verschoben werden, bis zum nächsten Eintrag, der ungleich 0 ist), unterhalb der Treppenlinie sind alle EintrÄge gleich 0. Beispiel Zeilenstufenform:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 \end{array}\right]$$

Damit lässt sich das LGS sehr schnell lösen: $x_4 = 0; 3x_3 = 9 \Rightarrow x_3 = 3; -8x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = -1; -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$

Rang und Lösbarkeit

Ein homogenes LGS Ax = 0 ist immer lösbar, da es immer die triviale Lösung x=0 besitz.
Sei$L : K^n \to K^m$und das inhomogene LGS L x = b gegeben. Ist x_0 eine Lösung, dann sind alle Lösungen gegeben durch:
$x = x_0 + Kern(L) := x_0 + y : y \in Kern(L) = x_0 + y : Ly = 0$.
Man nennt x_0 partikuläre Lösung, obwohl x_0 nur irgendeine Lösung bezeichnet. Der Kern von L kann über die Lösung des homogenen LGS bestimmt werden.
Ein inhomogenes System kann auch unlösbar sein und zwar genau dann, wenn Rang(A—b) ¿ Rang(A), also die Matrix mehr linear unabhängige Zeilen hat als b linear unabhängige Elemente. EIn inhomogenes System hat genau eine Lösung für Rang(A) = Rang(A—b) = n;
Sei $L : K^n \to K^m$ und das LGS L x = b gegeben. Dann sind äquivalent:
(i) Das LGS besitzt für jeden Vektor b $\in K^n$ genau eine Lösung.
(ii) Kern (L) = 0
(iii) Rang (L) = n

1.2 Determinanten

Besondere Matrizen Einige Matrizen haben besondere Formen, die Berechnungen erleichtern:

1. Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $1_n = (\delta_{ij})1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, mit dem Kronecker-Delta
2. Diagonalmatrix $D = \lambda * E$
3. Symmetrische Matix $A^T = A$
4. Einsermatrix E_{ij}, deren ij-ter Eintrag eine 1 ist, alle anderen Einträge müssen 0 sein.
5. Nullmatrix O, bei der alle Einträge 0 sind.
6. Obere Dreiecksmatrix $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$
7. Echte obere Dreiecksmatrix hat auf der Diagonalen ebenfalls 0 stehen
8. Analog gibt es die letzten beiden Fälle auch für die untere (echte) Dreiecksmatrix.

Definition Determinante

Sei K ein Körper und $N \ni n \neq 0$. Dann nennt man eine durch $det : M(nxn, K) \to K, a :\to det(A)$ definierte Abbildung ist eine Determinante, falls sie folgende Eigenschaften hat:

1. D1 det ist linear in jeder Zeile, d.h. det($\begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$) $= det(\begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}) + det(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix})$
2. D2 det ist alternierend, d.h. sind zwei Zeilen von A gleich, so gilt det(A) = 0
3. D3 det ist normiert und zwar det(1n) = 1

Eigenschaften der Determinante

Die folgenden Satze stellen die aus den Definitionen folgenden Eigenschaften der Determinanten zusammen:

1. det(A^T)=det(A)
2. $det(\lambda A) = \lambda^n \Delta det(A)$
3. Ist eine Zeile von A gleich null, dann gilt det(A) = 0
4. Tauscht man bei A die Zeilen und erhält dadurch B, dann gilt det(B) = -det(A)
5. Addiert man zu A das λ-fache der i-ten Zeile zu der j-ten Zeile ($i \neq j$), dann gilt det(A) = det(B).
6. Falls A eine obere Dreiecksmatrix ist, dann gilt det(A) =λ_1*...*λ_n. Insbesondere gilt dies für eine Diagonalmatrix A = diag(λ_1, . . . , λ_n).
7. Seien A, B quadratische Matrizen mit , dann gilt die Regel det(A*B) = det(A) · det(B).
8. det(A) = 0 ist gleichbedeutend mit der Aussage Rang(A) ¡ n und zeigt damit, dass A nicht invertierbar ist. Es gilt außerdem $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * A^T$
9. Skalare können aus Zeilen oder Spalten gezogen werden. det(a, xb, c, d) = x det(a, b, c, d)

Determinante mit Spur

In der linearen Algebra bezeichnet man als die Spur einer quadratischen nxn-Matrix A über einem Körper K die Summe der Hauptdiagonalelemente dieser Matrix. Für die Matrix:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
$Spur(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
Für alle reellen oder komplexen nxn-Matrizen A gilt:
$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Spur}(A))$

Determinanten mit Gauß

Mit Hilfe dieser Regeln kann man eine Determinante prinzipiell durch Umformen von A in eine Zeilenstu- fenform berechnen. Wir werden später auch noch andere Regeln zur Berechnung kennen lernen, wollen uns aber zunächst mit diesen Elementaren Rechenregeln vertraut machen.

Definition Permutation

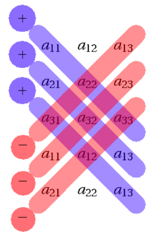
Sei M eine endliche Menge mit n $\in M$ Elementen. Dann bezeichnen wir eine bijektive Abbildung $M \to M$ als Permutation. Die Menge S^n aller Permutationen heißt symmetrische Gruppe.
Ein $s \in S^n$ heißt Transposition, wenn sie zwei verschiedene Zahlen vertauscht und alle anderen fest lässt.
Eine Permutation lässt sich explizit durch eine Wertetabelle beschreiben. Wir betrachten im Folgenden zur Vereinfachung meist die Menge 1,..., n. Dann bezeichen wir das Paar (i, j) als Fehlstand von π, falls i, j aber π(i)$¿pi()$j gilt.
Sei die Zahl $r(\pi)$, der Fehlstände von π. Dann definieren wir das Signum sign(π) als:
$sign(\pi) = (-1)^{r(\pi)}$

Determinanten mit Leibniz

Wir haben die Determinante asiomatisch über die Weierstraßschen Axiome eingeführt. Es gibt aber eine äquivalente konstruktive Definition, welche eine direkte Berechnungsformel für Determinanten angibt, die Leibniz-Formel. Sei K ein Körper und $n \geq 1$, so gibt es genau eine Determinante det : $M(nxn, K) \to K$
$det(A) = \sum_{\pi \in S_n} sign(\pi) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\pi i}$ Man geht also jede mögliche Anordnung der Komponenten von A durch, wobei man jedoch das Signum der Permutation beachten muss, welches garantiert, dass die Determinante alternierend ist. Aus dieser Gleichung sind auch die elementaren Regeln zur Berechnung von det(A) begründet:
Für den Fall von 2x2-Matrizen gilt:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
Für den Fall von 3x3-Matrizen gilt:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Determinanten mit Sarrus

Die letzte Regel bezeichnet man auch als die Regel von Sarrus, welche besagt, dass man den Wert der Determinante einer 3x3-Matrix durch folgende Merkregel berechnen kann:



Zunächst addiere man die Produkte der Komponenten auf den Diagonalen von links oben nach rechts unten und subtrahiere dann die Diagonalen von rechts oben nach links unten. Vosicht! Die Regel gilt nur für $n \leq 3$

Determinanten mit Laplace

Als nächstes wollen wir den Entwicklungssatz von Laplace formuliere, welcher nicht nur oft eine erhebliche Erleichterung der Rechnung mit sich bringt, sondern als einziger die Berechnungen aller Determinanten von Matrizen mit $n \geq 4$ ermöglicht.
Durch Entwicklung in Unterdeterminanten reduziert man den Rang, bis die Berechnung (z.B. für eine 3x3-Matrix) möglich ist:
$\Rightarrow$ Dazu legt man eine Zeile oder Spalte (was immer bequemer ist) fest, welche die sogenannten Pivot-Elemente enthält. Legen wir beispielsweise die 2. Zeile fest, sind $a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2m}$ diese Pivot-Elemente.
$\Rightarrow$ Die Unterdeterminanten zu diesen Pivot-Elementen erhält man, indem man in der Ausgangsmatrix jeweils die entsprechende Spalte und Zeile streicht.
So heißt beispielsweise die Unterdeterminante zum Pivot-Element a_{21}:
$det(A_{21} = det(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{pmatrix})$
Die Determinante von A lässt sich nun aus einer Summe von Produkten darstellen.
Jeder Summand setzt sich dabei folgendermaßen zusammen:
Summand (ij) = Pivot-Element (ij)* vorzeichenbestimmenderFaktor * Unterdeterminante (ij)
Entwickelt man nach der i-ten Zeile (i wird festgehalten) ergibt sich die Determinante A zu:
$det(A) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} * (-1)^{i+j} * A_{ij}$
Entwickelt man nach der j-ten Spalte (j wird festgehalten) ergibt sich die Determinante A zu:
$det(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} * (-1)^{i+j} * A_{ij}$
Die Vorzeichen können als folgendes Schachmuster visualisiert werden:
$\text{Schachbrett} = \begin{pmatrix} + & (-) & + & - \\ - & (+) & - & + \\ + & (-) & + & - \\ - & (+) & - & + \end{pmatrix}$

Determinanten mit LGS

Im wichtigen Spezialfall, in dem die Anzahl der Unbekannten mit der Anzahl der Gleichungen in übereinstimmt und die Koeffizientendeterminante nicht verschwindet, d.h. $det(A) \neq 0$ kann die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems explizit und eindeutig angegeben werden:
$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & | & b_1 \end{pmatrix}$
Dann gilt:
$x_i = \frac{det(a_1,...,a_{i-1},b,a_{i+1},...,a_n)}{det(A)}$
wobei a_i den i-ten Spaltenvektor von A bezeichnet. Man erhält also die i-te Komponente der Lösung x dadurch, dass man den i-ten Spaltenvektor von A durch b ersetzt, die Determinante davon bildet und schließlich das Ganzen noch durch die Determinante der ursprünglichen Matrix A teilt.

Hinweis:
Für die praktische Lösung von linearen Gleichungssystemen höherer Dimensionen ist die CRAMERsche Regel nicht geeignet. Der Rechenaufwand übersteigt mit wachsender Dimension sehr schnell alle Vorstellungen.