# Aufgabe 1

a) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Leftarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_5 = a$; $x_4 = b$

$x_3 = -\frac{a+b}{2}$

$x_2 = 2 + \frac{a+b}{2} - b$

$x_1 = -1 - a - b + \frac{a+b}{2}$

$$L = \left\{ x \in \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $$\dim(\text{kern}) = \dim(L_{\text{homogen}}) = \dim\left(a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$= 2 \neq 0 \Rightarrow$ nicht injektiv

c) $\text{Rang}(L) = \dim V - \dim \text{kern} = 5 - 2 = 3$

# Aufgabe 2

1.) $$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{array}\right) \cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2\cdot \\ -4\cdot \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & -7 \end{array}\right) - \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) ↯$$

$\Rightarrow L = \emptyset$

3) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \\ -4 \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 6 & -19 \\ -3 & 0 & 11 & -36 \end{array}\right) -3$$

$$\Leftarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -10 \\ -1 & 0 & 6 & -19 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{array}\right)$$

$x_3 = -3 \quad x_2 = 2$

$x_1 = 1$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

## Aufgabe 3

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 1+2i & 2+i & 1+4i \\ 2-i & 1-2i & 4-i \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot \left(-\frac{(1-2i)}{(2+i)}\right) \\ + \end{array}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1+2i & 2+i & 1+4i \\ a & 0 & b \end{array}\right) \qquad x_2 = \frac{b}{a}$

$a = (2-i) - \frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i} = \frac{(4-i^2)}{2+i} - \frac{(1-4i^2)}{2+i} = \frac{3+3i^2}{2+i}$

$b = (4-i) - \frac{(1-2i)(1+4i)}{2+i} = \frac{(4-i)(2+i) - (1-2i)(1+4i)}{2+i}$

$= \frac{8-1+2i-2i-i^2+8i^2}{2+i} = \frac{7+7i^2}{2+i}$

$x_2 = \frac{7+7i^2}{(2+i)} \cdot \frac{(2+i)}{3+3i^2} = \frac{7}{3}$

$x_1 = \frac{1+4i - \frac{7}{3}(2+i)}{1+2i} = \frac{-\frac{11}{3} + \frac{5}{3}i}{1+2i}$

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -7 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ -2\cdot \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 15 & -15 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & -7 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot 3 \end{array}$

$\downarrow$

$x_2 = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \Leftarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 30 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & -7 & 6 & 4 \end{array}\right)$

$x_3 = \frac{5}{10} = 0{,}5$

$x_1 = \frac{17}{10} = 1{,}7$

3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 0 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} -8\cdot \\ + \end{array}$

$\downarrow$

$x_1 = 1 \qquad \Leftarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$

$x_2 = -2$

$x_3 = 1$

## Aufgabe 4

$$\left(\begin{matrix} 2 & t \\ 2t & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \cdot(-t) \\ + \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{matrix} 2 & t \\ 0 & 1-t^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \\ 1+t \end{matrix}\right)$$

a) Keine Lösung für $\left.\begin{matrix} 1-t^2=0 \\ 1+t \neq 0 \end{matrix}\right\} t=1$

b) unendlich Lösungen für $\left.\begin{matrix} 1-t^2=0 \\ 1+t=0 \end{matrix}\right\} t=-1$

$$\Rightarrow L = \left\{ x \,\middle|\, x \in \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) genau eine Lösung $\left.\begin{matrix} 1-t^2 \neq 0 \\ 1+t \neq 0 \end{matrix}\right\} x_2 = \frac{1+t}{1-t^2} = \frac{1}{1-t}$

$$x_1 = \frac{-1-\frac{t}{1-t}}{2}$$

$$= -1/2 - \frac{t}{2(1-t)}$$

### Zusatz

1.) Korrekt, da $L=\emptyset$ auch eine Lösungsmenge ist.

2.) ~~Falsch, da die weil~~ $\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ Korrekt, da $Rang(L) < n$,

3.) Falsch, da alle Gleichungen vielfache voneinander sein könnten.

## Aufgabe 5:

– Wann ist $L$ einelementig?

→ Am Schnittpunkt der Geraden

$$L = \left\{ x \,\middle|\, -\frac{a_{11}}{a_{12}} x_1 + \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{-a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{b_2}{a_{22}} \right\}$$

– Wann is $L$ leer?

→ Wenn die beiden Geraden parallel sind

$$L = \emptyset$$

– Wann enthält $L$ mehr als ein Element?

→ Wenn die Geraden identisch sind.

$$L = \{ x \mid a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \}$$

# Aufgabe 6:

(1) $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

**Lösung:**

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 4 - 6 = -2$$

(2) $\det\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$

**Lösung:**

$$\det\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - abc - abc - abc = a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$$

# Aufgabe 7

(3) Berechne die folgenden Determinanten

(1) $\det\begin{pmatrix}x & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x\end{pmatrix}$

**Lösung:** Mit der Sarrus-Regel erhält man

$$\det\begin{pmatrix}x & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x\end{pmatrix} = x^3 + 1 + 1 - 3x = (x-1)^2(x+2).$$



# Aufgabe 8:

(4) $\det\begin{pmatrix}t+3 & -1 & 1\\ 5 & t-3 & 1\\ 6 & -6 & t+4\end{pmatrix}$

**Lösung:** Man addiere die zweite Spalte zu der ersten Spalte und addiert dann die dritte Spalte zu der zweiten Spalte, dann erhält man

$$\det\begin{pmatrix}t+3 & -1 & 1\\ 5 & t-3 & 1\\ 6 & -6 & t+4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}t+2 & 0 & 1\\ t+2 & t-2 & 1\\ 0 & t-2 & t+4\end{pmatrix}$$

$$= (t+2)(t-2)\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & t+4\end{pmatrix} = (t+2)(t-2)\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & t+4\end{pmatrix}$$

$$= (t+2)(t-2)(t+4)\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = (t+2)(t-2)(t+4)$$

# Aufgabe 9:

(2) $\det\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -3 - 2 \cdot [6 - 15]$$
$$= 15$$

(3) $\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
$$= 4 \cdot [1 + 10 + 4 + 1 + 4 - 10] + 2 \cdot [-6 + 0 + 6 - 6 - 0 - 6] -$$
$$- 1 \cdot [-30 + 0 + 3 + 12 - 0 - 3] = 34$$

# Aufgabe 10:

(1) Zeige, dass zu einer für meine Matrix $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$ gilt

$$\det(A^T) = \det(A)$$

*Hinweis:* Verwende die Leibniz-Formel.

**Beweis:** Sei $A = (a_{ij})$ für die Komponenten der transponierten Matrix $A^T = (b_{ij})$ gilt $b_{ij} = a_{ji}$, und somit

$$\det A^T = \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\mathcal{P}) b_{1\mathcal{P}(1)} \cdots b_{n\mathcal{P}(n)}$$
$$= \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\mathcal{P}) a_{\mathcal{P}(1)1} \cdots a_{\mathcal{P}(n)n}$$
$$= \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\mathcal{P}) a_{1\mathcal{P}^{-1}(1)} \cdots a_{n\mathcal{P}^{-1}(n)}$$

Setzten wir nun $\sigma = \mathcal{P}^{-1}$, dann gilt $\operatorname{sign}(\mathcal{P}) = \operatorname{sign}(\sigma)$ und daher

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \det(A)$$

(2) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ , $y = (y_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass Folgendes gilt:

$$x \text{ und } y \text{ sind linear abhängig} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0 \; \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

**Beweis:** "$\Rightarrow$"

$$x_i = a \cdot y_i, \forall i \Rightarrow \det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a \cdot y_i & y_i \\ a \cdot y_j & y_j \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow a^2 \det\begin{pmatrix} y_i & y_i \\ y_j & y_j \end{pmatrix} = 0$$

(3) Zeige, das für $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

im Allgemeinen nicht gilt.

**Beweis:** Wir nehmen hier den Spezialfall $n = 2$ heraus und definieren uns

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dann ergibt sich

$$\det(A + B) = 1 \neq 0 = \det(A) + \det(B)$$

(4) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die angegebenen Determinanten:

det(A) =.......34 (siehe a 2

$\det(A^T A A^T)$=.......$34^3$ (det(AT) det(A) det(AT))

$\det(A^{-1} A A^{-1})$=....... $\frac{1}{34}$ (det(A$^{-1}$)