Technische Universität München, Fakultät für Physik

Ferienkurs - Lineare Algebra

Hanna Schäfer

03. März 2014

Merkinhalte

LGS

In einem LGS darf man folgende Äquivalenzumformungen durchführen, ohne dass sich die Lösungsmenge verändert:

1. 2 Gleichungen vertauschen
2. Eine Gleichung auf beiden Seiten mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren
3. Ein beliebiges Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren

Diese Umformungen sind zulässig, da sie ohne Informationsverlust rückgängig zu machen sind (Äquivalenz).
LGS in Form einer Matrix:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Gauss-Algorithmus

Oben erwähnten Äquivalenzumformungen
Matrix in sogenannte Zeilenstufenform bringen
Die Elemente am Kopf jeder Stufe werden Pivotelemente genannt
Damit lässt sich das LGS sehr schnell lösen indem die Zeilen von unten Stufenweise gelöst werden.

Rang und Lösbarkeit

Rang(L)>n, beudeutet es gibt keine lösung
Rang(L)=n, beudeutet es gibt genau eine lösung
Rang(L)<n, beudeutet es gibt unendlich viele lösungen

Besondere Matrizen

Einige Matrizen haben besondere Formen, die Berechnungen erleichtern:

1. Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $1_n = (\delta_{ij})1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, mit dem Kronecker-Delta
2. Diagonalmatrix $D = \lambda * E$
3. Symmetrische Matix $A^T = A$
4. Einsermatrix E_{ij}, deren ij-ter Eintrag eine 1 ist, alle anderen Einträge müssen 0 sein.
5. Nullmatrix O, bei der alle Einträge 0 sind.
6. Obere Dreiecksmatrix $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$
7. Echte obere Dreiecksmatrix hat auf der Diagonalen ebenfalls 0 stehen
8. Analog gibt es die letzten beiden Fälle auch für die untere (echte) Dreiecksmatrix.

Definition Determinante

1. D1 det ist linear in jeder Zeile, d.h. $\det(\begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}) = det(\begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}) + det(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix})$
2. D2 det ist alternierend, d.h. sind zwei Zeilen von A gleich, so gilt det(A) = 0
3. D3 det ist normiert und zwar det(1n) = 1

Eigenschaften der Determinante

Die folgenden Satze stellen die aus den Definitionen folgenden Eigenschaften der Determinanten zusammen:

1. det(A^T)=det(A)

2. $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
3. Ist eine Zeile von A gleich null, dann gilt det(A) = 0
4. Tauscht man bei A die Zeilen und erhält dadurch B, dann gilt det(B) = -det(A)
5. Addiert man zu A das λ-fache der i-ten Zeile zu der j-ten Zeile ($i \neq j$), dann gilt det(A) = det(B).
6. Falls A eine obere Dreiecksmatrix ist, dann gilt det(A) =λ_1*...*λ_n. Insbesondere gilt dies für eine Diagonalmatrix A = diag(λ_1, . . . , λ_n).
7. Seien A, B quadratische Matrizen mit , dann gilt die Regel det(A*B) = det(A) Âů det(B).
8. det(A) = 0 ist gleichbedeutend mit der Aussage Rang(A) < n und zeigt damit, dass A nicht invertierbar ist. Es gilt außerdem $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * A^T$
9. Skalare können aus Zeilen oder Spalten gezogen werden. det(a, xb, c, d) = x det(a, b, c, d)

Determinante mit Spur

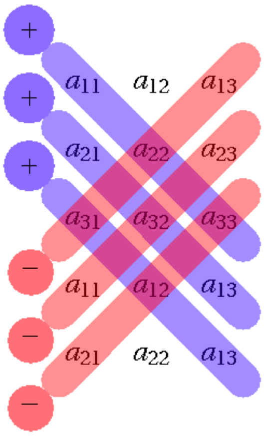
$Spur(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Spur}(A))$

Determinanten mit Leibniz

Für den Fall von 2x2-Matrizen gilt:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
Für den Fall von 3x3-Matrizen gilt:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Determinanten mit Sarrus

3x3-Matrix durch folgende Merkregel berechnen:



Determinanten mit Laplace

Dazu legt man eine Zeile oder Spalte fest, welche die sogenannten Pivot-Elemente enthÃďlt Die Unterdeterminanten zu diesen Pivot-Elementen erhÃďlt man, indem man in der Ausgangsmatrix jeweils die entsprechende Spalte und Zeile streicht.
So heiÃ§t beispielsweise die Unterdeterminante zum Pivot-Element a_{21}:
$det(A_{21} = det(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{pmatrix}))$
Entwickelt man nach der i-ten Zeile (i wird festgehalten) ergibt sich die Determinante A zu:
$det(A) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} * (-1)^{i+j} * A_{ij}$
Entwickelt man nach der j-ten Spalte (j wird festgehalten) ergibt sich die Determinante A zu:
$det(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} * (-1)^{i+j} * A_{ij}$
Die Vorzeichen können als folgendes Schachmuster visualisiert werden:

Determinanten mit LGS

Im wichtigen Spezialfall, in dem die Anzahl der Unbekannten mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmt und die Koeffizientendeterminante nicht verschwindet, d.h. $det(A) \neq 0$ kann die LÃűsung des inhomogenen Gleichungssystems explizit und eindeutig angegeben werden:
$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & | & b_1 \end{pmatrix}$
Dann gilt:
$x_i = \frac{det(a_1,...,a_{i-1},b,a_{i+1},...,a_n)}{det(A)}$

LGS lösen

Aufgabe 1

Sei

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Finden Sie alle Lösungen $x \in R^5$ des linearen Gleichungssystems Ax = b.
(b) Sei $L : R^5 \to R^4$ die lineare Abbildung gegeben durch L(x) = Ax für $x \in R^5$. Begründen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel, dass L nicht injektiv sein kann.
(c) Bestimmen Sie den Rang von L und die Dimension des Kerns von L.

Aufgabe 2

Man bestimme jeweils Lös(A, b) und die Lösung des zu- gehörigen homogenen Sytems (bei dem die letzte Spalte durch die Nullspalte ersetzt wird).

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gauß

Aufgabe 3

Berechnen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus:

1. $(1+2i)x_1 + (2+i)x_2 = 1+4i$
   $(2-i)x_1 + (1-2i)x_2 = 4-i$

2. $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2$
   $-x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$
   $x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 4$

3. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$
   $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 6$
   $7x_1 + 8x_2 + 9 = 0$

LGS mit Parameter

Aufgabe 4

Gegeben ist das vom reellen Parameter t abh ängige lineare Gleichungssystem:

1. $2x_1 + tx_2 = -1$

2. $2tx_1 + x_2 = 1$

a) besitzt für t=........ keine Lösung
b) besitzt für t=........ unendlich viele Lösungen: ....
a) besitzt für t=........ genau eine Lösung:........
Zusatz (Wahr oder falsch):
1. Jedes LGS hat eine Lösungsmenge.
2. Jedes homogene LGS mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens 2 Lösungen.
3. Jedes inhomogene LGS mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar.

Aufgabe 5

Es sei $a_{ij}, b_i \in K$. Man betrachte das folgende LGS:
(I) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
(II) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$
In Abhängigkeit von a_{ij} und b_i beschreibe man die Lösungsmenge L des LGS.
-Wann ist L einelementig?
-Wann ist L leer?
-Wann enthält L mehr als ein Element? Wie sieht L dann aus?
Hinweis: Man berücksichtige, dass jede der beiden Gleichungen eine Gerade beschreibt.

Determinanten

Aufgabe 6 - Direkte Berechnung

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

Aufgabe 7 - Sarrus

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:
$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

Aufgabe 8 - Gauß

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:
$\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9 - Entwicklung

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Determinantensätze

Aufgabe 10

1) Zeige, dass zu einer für meine Matrix $A \in M(nxn, K)$ gilt:
det(A^T) = det(A)
2) Sei x = $(x_1, ..., x_n)^T$, y = $(y_1, ..., x_n)^T \in R^n$. Zeige, dass Folgendes gilt:
x und y sind linear abhaÌĹngig $\Rightarrow det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}$=0 $\forall i, j$
3) Zeige, dass zu einer für meine Matrix $A \in M(nxn, K)$ gilt:
det($A + B$) = det(A)+det(B)
4) Gegeben sei die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die angegebenen Determinanten:

det(A) =.......

det($A^T A A^T$)=.......

det($A^{-1} A A^{-1}$)=.......