LINEARE ALGEBRA
Ferienkurs

Hanna Schäfer
Philipp Gadow

INHALT

KAPITEL 1

ABBILDUNGEN

1.1 Lineare Abbildungen

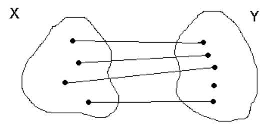
Definition

Eine Abbildung f von einer Menge M in eine Menge N ist ein Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ in eindeutiger Weise ein Element $y = f(x) \in N$ zuordnet. In Zeichen:
$f : M \to N, x :\to y = f(x)$
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear wenn gilt:
$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y), \forall x, y \in V, \lambda \in K$

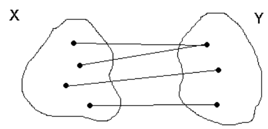
Eigenschaften von Abbildungen

Bennenungen:
Sei $f : a \to B$ eine Abbildung dann gilt:
A heißt Definitionsbereich von f, B Bildbereich von f.
Falls y = f(x), heißt y Bild von x, x heißt Urbild von y.
Die Menge $f(A) := f(x) \in B : x \in A$ heißt Bild von f, für $C \subseteq B$
Die Menge $f^{-1}(C) := x \in A : f(x) \in C$ heißt Urbild.
Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $f : A' \to B'$ heißen gleich, falls $A = A \wedge \forall x \in A$: f(x)=Urbild von C

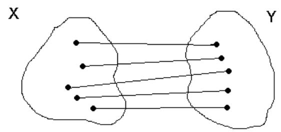
Eigenschaften:
f : $A \to B$ heißt: 1) injektiv, falls für x, $x \in Af(x) = f(x) \Rightarrow x = x$ bzw. $x \neq x \Rightarrow f(x) \neq f(x)$



2) surjektiv falls f(A)=B



3) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv.



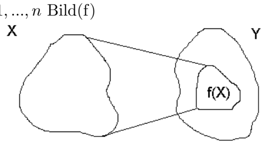
4) Ist $f : A \to B$ bijektiv, so heißt $f^{-1} : B \to A : f(x) :\to x$ die Umkehrabbildung oder inverse Abbildung zu f.
5) Identische Abbildung: $id_A : A \to A : x :\to x$.
6) Verknüpfung von Abbildungen: Sei $f : A \to B, g : B \to C, B \subset B$. Dann heißt $g \circ f : A \to C : x :\to (g \circ f)(x) := g(f(x))$ die Verknüpfung oder Hintereinanderausführung g nach f. Ist $f : A \to B$ bijektiv, so gilt $f \circ f^{-1} = idB, f^{-1} \circ f = idA$

Typen von linearen Abbildungen

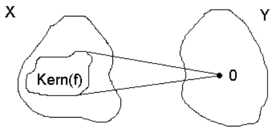
Für spezielle Eigenschaften linearer Abbildungen sind besondere Namen üblich.
Eine lineare Abbildung F :$V \to W$ die auch Homomorphismus genannt wird, heißt
Monomorphismus, wenn sie injektiv ist,
Epimorphismus, wenn sie surjektiv ist,
Isomorphismus, wenn sie bijektiv ist,
Endomorphismus, wenn V = W ist und
Automorphismus, wenn V = W und wenn sie bijektiv ist. Nur der Begriff Isomorphismus wird geläufig verwendet. Eine lineare Abbildung $f : R \to R, x :\to ax$, ist genau dann bijektiv, wenn $a \neq 0$; in diesem Fall ist die Umkehrabbildung $f : R \to R, y :\to x = \frac{1}{a}y$, a auch wieder linear.

Lineare Abbildungen in Verktorräumen

Grundlegende Eigenschaften:
Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung und V, W Verktorräume. Seien $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V und $y_1, ..., y_n$ Vektoren aus W.
Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f: V \to W$ derart, dass $f(v_i) = y_i \forall i \in 1, ..., n$ Bild(f)



bzw. Kern(f) ist ein Untervektorraum von V bzw. W Dies bedeutet insbesondere, das man Basen finden kann. Es gilt $V = W \Leftrightarrow dimV = dimW$.



SeinenV,V,W,W Vektorräume ,$f: V \to W$ linear,sowie $s: V \to V$ und $t: W \to W$ Isomorphismen. Setze $f := t \circ f \circ s^{-1}$. Dann ist Dann ist f surjektiv bzw. injektiv genau dann, wenn f surjektiv bzw. injektiv ist, und es gelten:
dim Bild(f) = dim Bild(f) und dim Kern(f) = dim Kern (f)

Definition Rang(f):
Der Rang(f) := dim Bild(f) heißt Rang von f.
$f surjektiv \Leftrightarrow Rang(f) = dimW$
$f injektiv \Leftrightarrow Kern(f) = 0$
Zusammen mit der Dimensionsformel liefern das weitere praktische Sätze.

Dimensionsformel:
Sei $dimV < \infty$, dann gilt dimV =Rang(f)+dimKern(f). Die Dimensionsformel liefert also einen einfachen Zusammenhang zwischen Kern,Bild und der Dimension des ursprünglichen Vektorraums. Sie ist auch in Klausuraufgaben praktisch um Lösungen zu überprüfen.

Gleiche endliche Mengen:
Sei $dimW = dimV < \infty$. Dann gilt: $f injektiv \Leftrightarrow f surjektiv$.

Matrizen Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen können mittels Matrizen bestimmt werden. Dabei sind die Spaltenvektoren der Matrix durch die Bilder

der Basisvektoren gegeben. Sei $f: V \to W$ nun eine lineare Abbildung und $a_l := f(v_l)((v_1, ..., v_n)$ Basis von V $,al \in W)$.Dann ist die Abbildungsmatrix A von f bzgl. der Basis $(v_1, ..., v_n)$ gegeben durch:

$$A := \begin{pmatrix} | & \dots & \| \\ a_1 & \dots & a_l \\ | & \dots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{kl}$$

Für das Bild eines Vektors der die Koordinaten ξ_l bezüglich der Basis v_l hat ergibt sich dann:
$\nu_k = \sum_{l=1}^{m} a_{kl}\xi_l$ für k=1,...,m
als Matrix geschrieben:

$$\begin{pmatrix} \nu 1 \\ \vdots \\ \chi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \xi 1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

kurz: $\nu = A\xi$
Satz 3.1 Matrix als lineare Abbildung:
Sei $A \in K^{mxn}$. Dann ist $L_A : K^{nx1} \to K^{mx1}, L_A(\xi) := A\xi$ eine lineare Abbildung. Die nächste Frage ist nun, wie sich Matrizen verändert, wenn man lineare Abbildungen verknüpft.

Linearkombination Als erstes die Frage wie die darstellende Matrix C einer linearen Funktion $h := f + \lambda g$ aussieht, die durch linearkombination zweier anderer linearer Funktionen f und g entsteht. Seien A und B darstellende Matrizen der linearen Funktionen f und g. Dann gilt für die Koeffizienten der Matrix C, die die lineare Funktion $h := f + \lambda g$ darstellt: $c_{kl} = a_{kl} + \lambda b_k l$
In Matrizenschreibweise
$C = A + \lambda B$
Die Linearkombination von Matrizen erfolgt also Komponentenweise

Produkt Die nächste Frage ist nun, was bei Komposition von linearen Abbildungen geschieht. Ist C nun wieder darstellende Matrix der Funktion $h := g \circ f$, A von f und B von g dann gilt für die Koeffizienten $c_i j$: $c_j l = \sum_{k=1}^{m} b_{jk}a_{kl}$
Man schreibt kurz
C = BA

Inverse Martix Seien $A, B \in K^{nxn}$. Wenn B A = E, dann gilt auch A B = E. B ist eindeutig bestimmt, und $A^{-1} := B$ heißt die zu A inverse Matrix. Damit gilt zudem $(A^{-1})^{-1} = A$ und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Basiswechsel Die nächste Frage ist nun, wie sich die Abbildungsmatrix A verändert, wenn man die Basis in V bzw. W wechselt. Sei $v_1, ..., v_n$ ein Basis von V, $v_1, ..., v_n$ eine weitere Basis von V. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix S, die Koordinatentransformation von den neuen auf die alten Koordinaten beschreibt. Man legt S folgendermaßen fest.
$\xi = S\xi \Leftrightarrow \xi = S^{-1}\xi$
Analoge überlegungen für W liefern dann den folgenden Satz.
SeienV, W K-Vektorräume mit dimV=n, dimW=m und $f: V \to W$ linear.Sei A die Abbildungsmatrix von f bzgl. der Basen v_i von V und w_j von W.

Dann ist $A' = T^{-1}AS$
die Abbildungsmatrix bzgl. der Basis v_i von V und $w_j$in W.
S und T beschreiben den Basiswechsel. Hinweis: Dabei bilden Matrizen immer vom neuen (gestrichenen) System in das alte (ungestrichene) ab, und die inversen vom der alten zur neuen Basis.
Betrachtet man nun eine Koordinatentransformation bzw. einen Basiswechsel in V so ergibt sich für die Transformation der Abbildungsmatrix A: Rang(A') = Rang(A), dim Kern(A') = dim Kern(A)
Allgemeiner Basiswechsel für einen Endomorphismus:
Sei V =W, $v_i = w_i$ und $f \in End(V)$.Dann gilt: $A = S^{-1}AS$

Lineare Gleichung Sei $x_0 \in V$ eine Lösung der Gleichung $f(x_0) = b$ Dann gilt für die Lösungsmenge $f^{-1}(b) = x_0 + Kern(f)$
Sei V ein Vektorraum, $W \subset V$ ein Untervektorraum und $a \in V$, dann nennt man $a + V := a + x : x \in W$ einen affinen Unterraum von V.

1.2 Bilineare Abbildungen - Skalarprodukt

Euklidische Vektorräume

Im Folgenden bezeichnet V immer einen R-Vektorraum. Ein Skalarprodukt $\langle *, * \rangle : VxV \to R$ ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform. Es muss also gelten:
1. bilinear:

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

2. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

3. $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle$

2. symmetrisch: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
3. positivdefinit: $\langle v, v \rangle \geq 0, und \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
Man bezeichnet ein Paar $(V, \langle *, * \rangle)$ aus R-Vektorraum und Skalarprodukt als euklidischen Vektorraum.

Definition Bilineraformen

Blinearformen bilden nicht immer auf ganz R ab. Deshalb wird die Definitheit formuliert. Eine symmetrische Matrix A ist:
positiv definit $\Leftrightarrow x^t * A * x > 0 \forall x \in R^n$
positivsemidefinit $\Leftrightarrow x^t * A * x \geq 0 \forall x \in R^n$
negativ definit$\Leftrightarrow x^t * A * x < 0 \forall x \in R^n$
negativ semidefinit $\Leftrightarrow x^t * A * x \leq 0 \forall x \in R^n$
indefinit $\Leftrightarrow x^t * A * x \leq 0 \vee \geq 0 \forall x \in R^n$
Bei der Definition der Definitheit beschränken wir uns lediglich auf symmetrische Matrizen!

Definitheit

Um die Definitheit einer Matrix herauszufinden gibt es verschiedene Möglichkeiten.

Das charakteristische Polynom
Die Untersuchung der Definitheit mit Hilfe des charakteristischen Polynoms ist die einzige Methode, mit der man nachweisen kann, dass eine Matrix semidefinit ist. Es gilt: Beim Hurwitzkriterium werden die Unterdeterminanten der (symmetrischen) Matrix untersucht. Dabei sagt dieses Kriterium folgendes:
Matrix ist positiv definit ⇔ alle ihre Unterdeterminanten sind positiv
Matrix ist negativ definit ⇔ alle ihre Unterdeterminanten sind negativ
Vorsicht! Das Hurwitzkriterium sagt nichts über Semidefinitheit oder Indefinitheit aus!

Die Signatur
Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $A \in K^{nxn}$. Gilt für die Signatur, dass n+ = n = dimV, so ist die Matrix positiv definit. Gilt n- = n = dimV, so ist sie negativ definit.
Sind alle Eigenwerte positiv ⇔ Matrix ist positiv definit
Sind alle Eigenwerte positiv oder null ⇔ Matrix ist positiv semidefinit
Sind alle Eigenwerte negativ ⇔ Matrix ist negativ definit
Sind alle Eigenwerte negativ oder null ⇔ Matrix ist negativ semidefinit
Gibt es positive und negative Eigenwerte ⇔ Matrix ist indefinit

Das kanonische Skalarprodukt

Das kanonische Skalarprodukt über R^n ist dabei definiert als $\langle v, w \rangle = v^t * w = \sum_0^N v_i * w_i$. Das Allgemeine Skalarprodukt lässt sich in der Form $\langle v, w \rangle = v^t Aw, v, w \in K^n, A \in K^{nxn}$ schreiben. Dabei gilt für A:
* A=hermitesch
* A=positiv definit $(\forall Eigenwerte \lambda_i von A gilt : \lambda i > 0)$
* $A^T = A$

Interpretation von Skalarprodukten

Orthogonalität
Zwei Vektoren v, w sind zueinander orthogonal bezüglich eines Skalarprodukts s(*, *), falls gilt s(v, w) = 0. Gilt zusätzlich s(v, v) = s(w, w) = 1 so nennt man die Vektoren orthonormal

Norm
Eine Abbildung $|| * || : V \to R$ heißt Norm, falls gilt:
1. $|| * || \geq 0$ für alle $v \in V$ und $|| * || = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
2. $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$ für alle $\lambda \in R, v \in V$.

3. $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$ für alle v, $w \in V$ (Dreiecksungleichung).

Gebräuchliche Normen
* p-Norm: $||v||_p := (v_1 + ... + v_n)^p$
* Maximumsnorm: $||*||_max := max_i ||v_i||$
* $||v|| = \langle v, v\rangle$ ist eine Norm für jedes Skalarprodukt $\langle *, *\rangle$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
Sei $(V, \langle *, *\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt für $||v|| = \langle v, v\rangle$ und alle $w, v \in V |\langle v, w\rangle| \leq ||v|| ||w||$

Winkel
Sei $(V, \langle *, *\rangle)$ euklidischer Vektorraum. Der Winkel zwischen zwei nicht verschwindenden Vektoren $v, w \in V$ ist die (eindeutige) Zahl $\Phi \in [0, \Pi]$ für welche $cos\Phi = \frac{\langle v,w\rangle}{||v||*||w||}$ ist.

Orthonormalbasis

Sei $(V, \langle *, *\rangle)$ euklidischer Vektorraum. Die Vektoren $v_1, ..., v_k \in V$ heißen
* orthogonal falls $\langle vi, vj\rangle = 0$ für alle $i \neq j$
* orthonormal falls $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$
Eine Basis aus orthonormalen Vektoren heißt Orthonormalbasis (ONB). Sind $v1, ..., v_k$ eine ONB, so gilt für ein beliebiges $w \in V$: $w = \sum \langle vu_i\rangle u_i$

Gram-Schmidt Verfahren Oftmals begegnen wir Basen die nicht orthogonal oder orthonormal sind. Da dies aber das rechnen oftmals vereinfacht gibt es Wege um aus einer solchen Basis eine Orthonormalbasis zu machen.
Sei $v_1...v_d$ eine Basis von U, dann sind $u_1...u_d$ eine ONB :
(i) $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$
(ii) $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1; u_2 = \frac{w_2}{||w_2||}$
(iii) $w_3 = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2; u_3 = \frac{w_3}{||w_3||}$
(iv) ...
Um zu verhindern das sich durch das normieren bedingte Rundungsfehler immer stärker auswirken gibt es ein alternatives, aber etwas längeres Verfahren:
(i) $w_1 = v_1$
(ii)$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle} w_1$
(iii)$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle} w_2$
(iv)...
(v)$u_1 = \frac{w_1}{||w_1||}, ..., u_d = \frac{w_d}{||w_d||}$

Orthogonalraum Sei W ein d-dimensionaler Unterraum von V dann ist der zugehörige Orthogonalraum $W_\perp$ definiert als:
$W_\perp := w' \in K^n | w' \perp w \forall w \in W$
Für den R^2 und R^3 ist dieser recht gut vorstellbar. So ist der Orthogonalraum

einer Geraden durch den Ursprung genau die darauf senkrecht stehende Gerade bzw. Ebene und umgekehrt.
(i) $W^\perp$ ist Untervektorraum von V
(ii) $W^\perp \cap W = 0$
(iii) $dim(W^\perp) = n - d$
(iv) $(W^\perp)^\perp = W$ (für $dimW < \infty$)

Senkrechte Projektion Die senkrechte Projektion ist am ehesten unter dem Begriff "Lot fällen" bekannt und beschreibt die Abbildung eines Punktes auf den zu ihr nächstliegenden Punkt eines Raums. Sei W ein Untervektorraum von V, $v \in V$ und sei $w_1...w_n$ eine Orthonormalbasis von W . Dann ist $P_W(v) = \sum_1^n \langle v, w_i\rangle w_i$ die senkrechte Projektion v' von v auf W. Die Projektion auf den zu W senkrechten Untervektorraum $W^\perp$ von V ergibt sich aus $P_{W^\perp}(v) = v - P_W(v)$
Für die Abbildungsmatrix A zu P_W bezügliche einer Basis $(v_1, ..., v_n)$ gilt $A_{ij} = (P_W(v_j))_{v_i}$

Diagonalisierung einer symmetrischen Bilinearform

Die Diagonalisierung einer symmetrischen Bilinearform $s : VxV \to R$ ist viel einfacher als die Diagonalisierung eines Endomorphismus. Hier ist eine Basis $B = (v_1, ..., v_n)$ gesucht, derart dass:
$s(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$
Eine derartige Basis nennt mann orthogonal für s. In Matrizen ausgedrückt ist zu einer symmetrischen Matrix $A \in M(nxn, R) ein T \in GL(n; R) gesucht,sodass:$

$$T^tAT = D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist. In diesem Fall bilden die Spaltenvektoren von T eine orthogonale Basis des R^n für A, denn:
$(T^te_i)A(Te_j) = e_i^t(T^tAT)e_j = e_i^tDe_j = 0$ für $i \neq j$

Diagonalisieruntssatz
Sei V ein n-dimensionaler R-Vektorraum und s eine symmetrische Bilinearform auf V . Dann gibt es für s eine orthogonale Basis B $=(v_1, ..., v_n)$ von V , d.h. MB (s) ist eine Diaagonalmatrix. Ist $qs : V \to R$ die zu s gehörige quadratische Form, und $\alpha_i := qs(v_i) = s(v_i, v_i)$, so gilt
$qs(v) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2$ für $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$ Die quadratische Form ist also in diesen Koordinaten frei von "gemischten Termen" $x_ix_j (i \neq j)$.