Lineare Abbildungen und Skalarprodukt – Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 – Linearität

V, W endlichdimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume mit Basis B_V, B_W

1.) $V = \mathrm{Span}_K (v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \dim(V) = n$ FALSCH

Gegenbeispiel: $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right)$, $n = 3$ aber $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

2.) $V = \mathrm{Span}_K (v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \dim(V) \leq n$ WAHR

3.) $V = \mathrm{Span}_K (v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \dim(V) \geq n$ FALSCH

4.) $L: V \to W$ Linear und surjektiv $\Rightarrow \dim W = \dim V$ FALSCH

5.) $L: V \to W$ Linear und injektiv $\Rightarrow \dim W = \dim V$ FALSCH

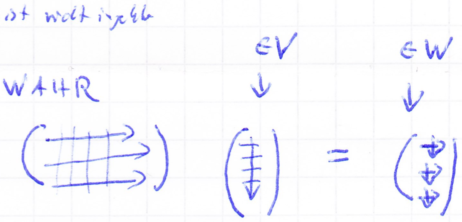
6.) $L: V \to W$ Linear und bijektiv $\Rightarrow \dim W = \dim V$ WAHR

7.) $L: V \to W$ und $\mathrm{Bild}(L) = W \Rightarrow L$ ist surjektiv WAHR

8.) $L: V \to W$ und $\mathrm{Bild}(L) = W \Rightarrow L$ ist injektiv FALSCH

Gegenbeispiel: $L: \{0, 1\} \to \{0\}$
$0 \mapsto 0$
$1 \mapsto 0$
$\mathrm{Bild}(L) = \{0\}$, aber L ist nicht injektiv

9.) Ist $L: V \to W$ Linear und $\dim W = l$, so hat die darstellende Matrix $M_L^{B_W, B_V} l$ Zeilen WAHR



10.) Ist $L: V \to W$ Linear und $\dim W = l$, so hat die darstellende Matrix $M_L^{B_W, B_V}$

11.) Jede Basiswechselmatrix ist quadratisch WAHR

12.) Jede Basiswechselmatrix ist invertierbar WAHR

Aufgabe 2 – Abbildungseigenschaften

Seien $x_1 < x_2 < \dots < x_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. $P[x]_2$ Vektorraum der Polynome mit Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$ $(z^2, z, 1)$

Lineare Abbildung: $L: P[x]_2 \to \mathbb{R}^n$ Polynom $p \in P[x]_2$

$$p \mapsto \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$$

Zerlege Polynom in Linearfaktoren:
$p = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$
$= x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) x + \lambda^2$

$n = 1$ $L: p \mapsto p(x_1) \in \mathbb{R}$

Polynom, für das $\lambda_1 = x_1$ oder $\lambda_2 = x_1$ Nullstelle ist

dann ist der Kern von L: $\mathrm{Ker}(L) = \{ \quad \}$, da

mit den Nullstellen des Polynoms λ_1, λ_2: $p(\lambda_1) = p(\lambda_2) = 0$

Aufgabe 2

Bei dieser Aufgabe muss beachtet werden:

- $x_1 \dots x_n$ sind fest vorgegeben
- $x_1 \dots x_n$ sind alle verschieden
- $p = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ ist die Variable der Gleichung

a) Für $n = 1$ suchen wir das $p = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ für welches $a_0 x_1^2 + a_1 x_1 + a_2 = 0$

Wir schreiben als Faktorisierung $(x_1 - \lambda_1)(x_1 - \lambda_2)$
$= x_1^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) x_1 + \lambda_1 \lambda_2$

Die Faktorisierung ist 0 für $\lambda_1 = x_1 = \lambda_2$

Daher gilt für $p = 1 \cdot x^2 + (-(2x_1))x + 2x_1$ als einziges Element des Kerns.

$\text{Dim}(\text{kern}) = 0$ $\quad$ $\text{Rang}(P(x_1)) = 1$

$\text{Dim}(\mathbb{R}^1) = 1$

b) $\Rightarrow$ L ist injektiv ($\text{Dim}(\text{kern}) = 0$)

$\Rightarrow$ L ist surjektiv ($\text{Dim}(W) = \text{Rang}(f)$)

$\Rightarrow$ L ist bijektiv

a) Für $n = 2$ müssen beide Teile des Vektors 0 sein. Da $x_1 + x_2$ werden die Nullstellen verschieden. Wie in $n = 1$ gezeigt gilt dies für $p = 1\ x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$ als einziges Element des Kerns.

$\text{Dim}(\text{Kern}) = 0$ $\quad$ $\text{Rang}\left(\begin{bmatrix} P(x_1) \\ P(x_2) \end{bmatrix}\right) = 1$

$\text{Dim}(\mathbb{R}^2) = 2$

b) $\Rightarrow$ L ist injektiv ($\text{Dim}(\text{kern}) = 0$)

$\Rightarrow$ L ist <u>nicht</u> surjektiv $\text{Dim}(W) \neq \text{Rang}(f)$

$\Rightarrow$ L ist <u>nicht</u> bijektiv

a) Für $n \geq 3$ gilt $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \ldots$, was bedeutet, dass wir 3 verschiedene Nullstellen mit dem Polynom p abdecken müssen. Da ein Polynom von Grad 2 maximal 2 Nullstellen besitzt, ist der Kern von L leer.

$\text{Kern} = \emptyset$ $\qquad$ $\text{Dim}\left(\begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \end{pmatrix}\right) = 1$

$\text{Dim}(\mathbb{R}^3) = 3$

$\Rightarrow$ L ist <u>nicht</u> injektiv $(\text{Dim}(\text{Kern}) \neq 0)$

$\Rightarrow$ L ist <u>nicht</u> surjektiv $(\text{Dim}(W) \neq \text{Rang}(f))$

$\Rightarrow$ L ist <u>nicht</u> bijektiv

Aufgabe 3 - Kern, Bild und Rang

$E = \{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \}$ Kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$

Lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$T(e_1) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad T(e_2) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad T(e_3) = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

Wir rekonstruieren die Abbildungsmatrix:
Es muss eine 2×3 - Matrix sein, da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$$\underset{\substack{\uparrow\ \ \uparrow\\ \text{Zeile}\ \ \text{Spalte}}}{(t_{ij})} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1} = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2} = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_3} = \begin{pmatrix} t_{13} \\ t_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

Also ist $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Wir bringen T auf Zeilenstufenform

$$T \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(T) = 2$$

b) Der Kern von T ist die Lösung des LGS
(der Lösungsraum)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Gauß: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, also $3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$2x_1 + 0 + 4x_3 = 0$
$\Leftrightarrow \ x_1 = -2x_3$
wähle $x_3 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\text{Kern}(T) = \text{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

$\dim \text{Kern}(T) = 1$

c) Dimensionsformel

$\dim V = \text{Rang}(T) + \text{Kern}(T)$

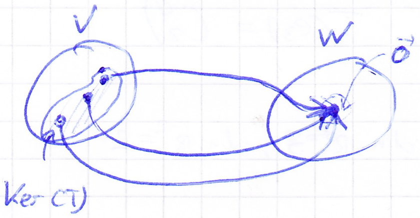
$3 = 2 + 1$ ✓

Zusatz:

d) Definition des Kerns: Sei $T: V \to W$ (lineare) Abbildung

$$Ker(T) := \{ v \in V : T(v) = \vec{0} \} = F^{-1}(\vec{0}) \subseteq V$$

(Urbild des Nullvektors in W)



e) zu zeigen: Ker(T) ist ein Untervektorraum

Beweis: z.z. UV0: $Ker(T) \neq \emptyset$, da $\{0\} \in Ker(T)$ für lineare Abbildungen, da $T(0) = 0$.

z.z. UV1: $v \in Ker(T),\ w \in Ker(T) \Rightarrow v+w \in Ker(T)$

$$T(v+w) \underset{\text{T linear}}{=} T(v) + T(w) = 0 + 0 \underset{\text{0 neutrales Element der Addition}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ v+w bildet auch auf 0 ab, ist also $\in Ker(T)$.

z.z. UV2: $v \in Ker(T),\ \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot v \in Ker(T)$

$$T(\lambda \cdot v) \underset{\text{T linear}}{=} \lambda \cdot T(v) \underset{v \in Ker(T)}{=} \lambda \cdot 0 \underset{0 \cdot \lambda = 0 \text{ im Vektorraum}}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda \cdot v \in Ker(T)$

f) Definition des Bildes von T

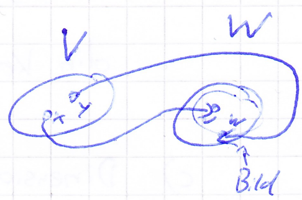
$T: V \to W$ (lineare) Abbildung

Bild von T: $T(V) := \{ w \in W : \exists\, v \in V \text{ mit } F(v) = w \}$

g) zu zeigen: Bild(T) ist ein Untervektorraum

z.z. UV0: $Bild(T) \neq \emptyset$ folgt aus der Definition des Bilds

z.z. UV1: $v \in Bild(T),\ w \in Bild(T) \Rightarrow v+w \in Bild(T)$



Seien $v = T(x)$ und $w = T(y)$; $x, y \in V$

$$v+w = T(x) + T(y) \underset{\text{T linear}}{=} T(x+y) \in Bild(T)$$

z.z. UV2: $v \in Bild(T),\ \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot v \in Bild(T)$

Sei $v = T(x)$, $x \in V$.

$$\lambda \cdot v = \lambda \cdot T(x) = T(\lambda \cdot x) \in Bild(T)$$

Aufgabe 4 - Matrixmultiplikation

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+3 \\ 1+8 & 1+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 6+ & 12+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ & 16 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 20 \\ 12 & 6 & 27 \\ 17 & 6 & 17 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 - Inverses

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x$

Wir berechnen das Inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{z_3 \leftarrow \frac{1}{2} z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\overset{z_2 \leftarrow \frac{1}{2}(z_2+z_3)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \overset{z_1 = z_1 - 2z_2 - 2z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 - Basiswechselmatrizen

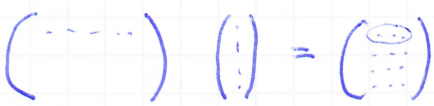
$L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$L: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

a) $E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Kanonische Basis des $\mathbb{R}^4$

$${}^{E}M_L^{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rechentipp: Matrixmultiplikation im Kopf vorstellen



b) Basiswechselmatrizen zur Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\1 \end{pmatrix} \right\}$

$${}^{B}M_{id}^{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

"von rechts nach links"

da $({}^{B}M_{id}^{E})\, v_E$

Matrixmultiplikation von rechts definiert ist für Vektor v

(WICHTIGER Satz aus Vorlesung:

Die Spalten der darstellenden Matrix sind die Bilder der Basisvektoren)

$${}^{E}M_{id}^{B} = \left({}^{B}M_{id}^{E}\right)^{-1}$$

Also invertiere ${}^{B}M_{id}^{E}$:

"Vektor in E geht rein"

$\downarrow$

${}^{B}M_{id}^{E}$

$\downarrow$

"Vektor in B geht raus"

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 1&-1&0&1&0&1&0&0 \\ 2&0&0&2&0&0&1&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&-1&0&1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&1/2&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&1&0&0&1/2&0 \\ 0&1&0&0&0&-1&1/2&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&-1&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-1&1&-1 \\ 0&1&0&0&0&-1&1/2&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&-1&1&-1/2&1 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\left({}^{B}M_{id}^{E}\right)^{-1}}$

$${}^{E}M_{id}{}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bilinearformen

Aufgabe 7 - Bilinearität

$u := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Definiere $u_1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $u_2 := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

a) $s(u,v) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_1 + 2 x_1 y_2 + 6 x_2 y_2$

$$s(u_1+u_2, \lambda v) = (x_1+z_1)\, y_1 \lambda + 2(x_2+z_2)\, y_1 \lambda + 2(x_1+z_1)\, y_2 \lambda + 6(x_2+z_2)\, y_2 \lambda$$

$$= \left(x_1 y_1 + z_1 y_1 + 2 x_2 y_1 + 2 z_2 y_1 + 2 x_1 y_2 + 2 z_1 y_2 + 6(x_2 y_2) + 6(z_2 y_2)\right) \cdot \lambda$$

$$= \lambda\left(s(u_1, v) + s(u_2, v)\right)$$

(ebenso in 2. Komponente)

Aufgabe 7 - Bilineare Formen (Fortsetzung)

b) $S(u,v) = 6x_1y_1 + y_1y_2$

Sei $u := \binom{x_1}{x_2}$, $v = \binom{y_1}{y_2}$, $w = \binom{z_1}{z_2}$, $\lambda \in K$

dann $S(u, v+w) = 6x_1(y_1 + z_1) + (y_1+z_1)\cdot(y_2+z_2)$

$= 6x_1y_1 + 6x_1z_1 + y_1y_2 + y_1z_2 + z_1y_2 + z_1z_2$

$\neq$ $S(u,v) + S(u,w) = 6x_1y_1 + y_1y_2 + 6x_1z_1 + z_1z_2$

$\Rightarrow$ Keine Bilinearform

c) $S(u,v) = x_1y_1 + 3x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_1y_2$

$u := \binom{x_1}{x_2}$ $v := \binom{y_1}{y_2}$ $w := \binom{z_1}{z_2}$

$S(\alpha(u+v), w) = \alpha(x_1+y_1)z_1 + 3\alpha(x_2+y_2)z_1 + \alpha(x_2+y_2)z_2 - 3\alpha(x_1+y_1)z_2$

$= \alpha(x_1z_1 + y_1z_1 + 3x_2z_1 + 3y_2z_1 + x_2z_2 + y_2z_2$

$- 3x_1z_2 - 3y_1z_2)$

$= \alpha(S(u,w) + S(v,w))$

ebenso: Linearität bzgl. 2. Komponente

Aufgabe 8:

a) 1) Bestimme Basis $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$ und Normalenvektor $n = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

↳ durch test / einsetzen ↳ auskoeffizienten

2) $h_1 = P_W(g_1) = \langle \begin{pmatrix}1+2\lambda\\\lambda\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1+2\lambda\\\lambda\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1+2\lambda\\0\\-1-2\lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\lambda\\2\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$

$h_2 = \langle \begin{pmatrix}3-\lambda\\0\\\lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}3-\lambda\\0\\\lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}3-2\lambda\\0\\-3+2\lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\lambda\\\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$

3) Das projezierte Bild einer Geraden kann ein einzelner Punkt sein, wenn die Gerade senkrecht zur Projektionsebene liegt.

b) $h_1 = h_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} + M \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + M \begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2\\ 4 & -2 & 0\\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} M = 2/3\\ \lambda = 1/3 \end{matrix}$

$\Rightarrow S = \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} + 2/3 \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/3\\4/3\\-1\end{pmatrix}$

c) $S_{g_1} = S + \alpha \cdot n = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}5/3\\4/3\\-1\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\lambda\\\lambda\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha = 1/2\\ \lambda = 5/6\end{matrix}$

$= \begin{pmatrix}1+2\cdot 5/6\\5/6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/3\\5/6\\0\end{pmatrix}$

$S_{g_2} = S + \beta n = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + M \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}5/3\\4/3\\-1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-M\\0\\M\end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 4/3,\ M = 5/3$

$= \begin{pmatrix}13/3\\0\\5/3\end{pmatrix}$

d) g_1 und g_2 besitzen keinen Schnittpunkt, da dieser auf S projeziert worden wäre und die Urbilder des Schnittpunktes verschieden sind.

Zusatz: Abbildungsmatrix A zur Projektion

1) Projeziere alle Basisvektoren von $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a}_1 = P_W(e_1) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = P_W(e_2) = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$
$$= 0 + \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_3 = P_W(e_3) = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \right\}$$

2) projeziere g_1 $\quad h_1 = A\, g_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 4 & 2\\-1 & 2 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1+2\lambda\\\lambda\\0\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1+2\lambda\\4\lambda\\-1-2\lambda+2\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}+2\\4\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

B ist genau dann Orthonormalbasis eines Vektorraums V, wenn gilt:

(1) B ist Basis von V und

(2) $\forall\, b_i, b_j \quad \langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$

Aufgabe 10

(1) $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) $w_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\, 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

$u_3 = \frac{1}{\sqrt{9/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$