TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN, FAKULTÄT FÜR PHYSIK

Ferienkurs - Lineare Algebra

Hanna Schäfer

03. März 2014

MERKINHALTE

0.1 Linearität

1. $f : M \to N, x :\to y = f(x)$
2. $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y), \forall x, y \in V, \lambda \in K$
3. Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen können mittels Matrizen bestimmt werden. Dabei sind die Spaltenvektoren der Matrix durch die Bilder der Basisvektoren gegeben.

0.2 Eigenschaften von Isomorphismen

1. injektiv, falls für x, $x \in Af(x) = f(x) \Rightarrow x = x$ bzw. $x \neq x \Rightarrow f(x) \neq f(x)$
2. surjektiv falls f(A)=B
3. bijektiv, falls f injektiv und surjektiv.

0.3 Rang, Kern und Bild

1. Die Menge $f(A) := f(x) \in B : x \in A$ heißt Bild von f, für $C \subseteq B$
2. Die Menge $f^{-1}(C) := x \in A : f(x) \in C$ heißt Urbild.
3. Die Menge C mit $f^{-1}(C) := 0$ heißt Kern.
4. $finjektiv \Leftrightarrow Kern(f) = 0$

5. $f surjektiv \Leftrightarrow Rang(f) = dimW$

6. Der Rang(f) := dim Bild(f) heißt Rang von f.

7. Sei $dimV < \infty$, dann gilt dimV =Rang(f)+dimKern(f).

8. Sei $dimW = dimV < \infty$. Dann gilt: $f injektiv \Leftrightarrow f surjektiv$.

0.4 Matrixaddition

1. $C = A + \lambda B$

2. $c_{kl} = a_{kl} + \lambda b_k l$

0.5 Matrixmultiplikation

1. C = BA

2. $c_j l = \sum_{k=1}^{m} b_{jk} a_{kl}$

0.6 Inverse Matrix

1. Wenn B A = E, dann gilt auch A B = E. B ist eindeutig bestimmt, und $A^{-1} := B$ heißt die zu A inverse Matrix.

2. Stelle Gleichungssystem aus (A|E)

3. Forme mit Gaußso um, dass gilt $(E|A^{-1})$

0.7 Basiswechselmatrizen

1. SeienV, W K-Vektorräume mit $f : V \to W$ linear. Sei A die Abbildungsmatrix von f

2. Dann ist $A' = T^{-1}AS$ die Abbildungsmatrix von V' nach W'

3. S und T beschreiben den Basiswechsel.

4. Bezechnungn können das rechnen leichter machen: $A_L'^{V',V'} = T_{id}^{V',V} A_L^{V,V} S_{id}^{V,V'}$

5. Es reicht also die Basiswechselmatrizen zu erstellen um eine Abbildung in ein anderes System zu übertragen.

0.8 Bilinearformen

1. Ein Skalarprodukt $\langle *, * \rangle : VxV \to R$ ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform
2. bilinear:
   a) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
   b) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
   c) $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle$
3. symmetrisch: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
4. positivdefinit: $\langle v, v \rangle \geq 0, und \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

0.9 Skalare

1. Kanonische Skalarprodukt über R^n ist dabei definiert als $\langle v, w \rangle = v^t * w = \sum_0^N v_i * w_i$.
2. Zwei Vektoren v, w orthogonal, falls gilt s(v, w) = 0.
3. Zwei Vektoren v, w orthonormal, s(v, v) = s(w, w) = 1
4. Der Winkel zwischen zwei Vektoren $v, w \in V$ ist die Zahl $\Phi \in [0, \Pi]$ für welche $cos\Phi = \frac{\langle v,w \rangle}{||v|| * ||w||}$ ist.

0.10 Normen

1. Eine Abbildung $|| * || : V \to R$ heißt Norm, falls gilt:
2. $|| * || \geq 0$ für alle $v \in V$ und $|| * || = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
3. $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$ für alle $\lambda \in R, v \in V$.
4. $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ für alle v, $w \in V$ (Dreiecksungleichung).

0.11 Orthogonale/ Orthonrmale Basis

1. Sei $(V, \langle *, * \rangle)$ euklidischer Vektorraum. Die Vektoren $v_1, ..., v_k \in V$ heißen
2. orthogonal falls $\langle vi, vj \rangle = 0$ für alle $i \neq j$
3. orthonormal falls $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

0.12 Orthogonale Projektion

1. Sei W ein UVR von V und $w_1 ... w_n$ eine Orthonormalbasis von W . Dann ist $P_W(v) = \sum_1^n \langle v, w_i \rangle w_i$ die senkrechte Projektion v' von v auf W.
2. Für die Abbildungsmatrix A zu P_W gilt $A_{ij} = (P_W(v_j))_{v_i}$

0.13 Gram-Schmidt Verfahren

1. Wege um aus einer Basis eine Orthonormalbasis zu machen.
2. Sei $v_1...v_d$ eine Basis von U, dann sind $u_1...u_d$ eine ONB :
3. $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$
4. $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1; u_2 = \frac{w_2}{||w_2||}$
5. $w_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2; u_3 = \frac{w_3}{||w_3||}$

Aufgaben

0.14 Lineare Abbildungen

Aufgabe 1 - Linearität

Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über C mit Basen BV , BW . Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr sind:

1. $V = LH(v_1, ..., v_n) \Rightarrow dim(V) = n$
2. $V = LH(v_1, ..., v_n) \Rightarrow dim(V) \leq n$
3. $V = LH(v_1, ..., v_n) \Rightarrow dim(V) \geq n$
4. $L : V \to W$ linear und surjektiv $\Rightarrow dim(W) = dim(V)$
5. $L : V \to W$ linear und injektiv $\Rightarrow dim(W) = dim(V)$
6. $L : V \to W$ linear und bijektiv $\Rightarrow dim(W) = dim(V)$
7. $L : V \to W$ und Bild$(L) = W \Rightarrow Listsurjektiv$
8. $L : V \to W$ und Bild$(L) = W \Rightarrow Listinjektiv$
9. $IstL : V \to W$linear und $dim(W) = l, sohatM_L^{BW,BV}$ l Zeilen
10. $IstL : V \to Wl$inear und $dim(W) = l, sohatM_L^{BW,BV}$ l Spalten
11. Jede Basiswechselmatrix ist quadratisch
12. Jede Basiswechselmatrix ist invertierbar

Aufgabe 2 - Abbildungseigenschaften

Für $n \in N$ seien die reellen Zahlen $x_1 < x_2 < ... < x_n$ fest gegeben. Außerdem sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome über R, deren Grad höchstens 2 ist. Gegeben ist die lineare Abbildung:

$$L : P_2 \to R^n mit p = a_0x^2 + a_1x + a_3 :\to \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie für dieFälle n=1, n=2, n=3 und $n \geq 4$ den Kern der Abbildung L. Geben Sie jeweils eine Basis des Kerns an.
Hinweis: Ist λ Nullstelle eines Polynoms, so kann das Polynom durch (x-λ) geteilt werden.
b) Für welche $n \in N$ ist L injektiv, surjektiv, bijektiv? Hinweis: Verwenden Sie die Dimensionsformel.

Aufgabe 3 - Kern, Bild und Rang

Sei E = e1, e2, e3 die kanonische Basis des R^3. Durch
$T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und T$(e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
wird eine lineare Abbildung $T : R^3 \to R^2$ definiert.
a) Welchen Rang hat die Abbildung T ?
b) Bestimmen Sie den Kern von T sowie dessen Dimension.
c) Überprüfen Sie die Gu ÌĹltigkeit der Dimensionsformel für T.
Zusatz:
d) Geben Sie die Definition des Kerns von L an:
e) Beweisen Sie, dass der Kern von L ein Untervektorraum von V ist:
f) Geben Sie die Definition des Bildes von L an:
g) Beweisen Sie, dass das Bild von L ein Untervektorraum von W ist.

Aufgabe 4 - Matrixmultiplikation

Bilden sie das Produkt aus folgenden Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 - Inverse

Sei L eine lineare Abbildung $L: R^3 \to R^2$. Bestimmen Sie die Inverse Abbildung L^{-1}

$$L: x \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x$$

Aufgabe 6 - Basiswechselmatrizen

Sei $L: R^4 \to R^4$. die lineare Abbildung gegeben durch

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x1 + x2 + x3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

Weiter sei E die kanonische Basis von R^4 und B $= v_1, v_2, v_3, v_4$ die Basis von R^4 mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Matrix $M_L^{E,E}$ an.
(b) Bestimmen Sie die Matrizen $M_{id}^{B,E}$ und $M_{id}^{E,B}$
(c) Berechnen Sie die Matrix $M_L^{B,B}$

0.15 Bilineare Formen

Aufgabe 7 - Bilinearität

Es seien $u =^t (x_1, x_2)$ und $v =^t (y_1, y_2)$ Welche der folgenden Abbildungen sind Bilinearformen?
(a)$s(u, v) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 6x_2y_2$
(b) $s(u, v) = 6x_1y_1 + y_1y_2$
(c) $s(u, v) = x_1y_1 + 3x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_1y_2$

Aufgabe 8 - Orthogonale Projektion

Sei V $=R^3$. Gegeben seien die Ebene E:$=x \in R^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ und die Geraden

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu, \lambda \in R$$

a) Die Geraden g_1 und g_2 werden in die Ebene E orthogonal projiziert. Geben Sie die Parameterdarstellung der projizierten Geraden h_1 und h_2 an. Ist das Bild einer beliebigen Geraden unter einer orthogonalen Projektion auf E stets eine Gerade?
b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S vonh_1 und h_2 .
c) Bestimmen Sie die Urbilder des Schnittpunkts S von h_1 und h_2 auf g_1 und g_2 .
d) Besitzen g_1 und g_2 einen Schnittpunkt?

Aufgabe 9 - Orthonormalbasis

Es sei (V, $\langle . \rangle$) ein Vektorraum mit Skalarprodukt und B $= b_1, ..., b_n$ eine Orthonormalbasis von V. Ergänzen Sie die Definition: B ist genau dann Orthonormalbasis eines Vektorraums V , wenn gilt:
(1) B ist Basis von V und (2) ...

Aufgabe 10 - Gram Schmidt Verfahren

Aufgabe G77 Gegeben sei die linear unabha ÌĹngige Menge M = v1, v2, v3 mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des GramâĂŞSchmidtâĂŹschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis für LH$(v_1, v_2, v_3) \subseteq R^4$.