LINEARE ALGEBRA
Ferienkurs

Hanna Schäfer
Philipp Gadow

INHALT

KAPITEL 1

GRUNDBEGRIFFE

1.1 Aussagen und Quantoren

Eine Aussage ist ein Element der Menge $\{\text{wahr (w)}, \text{falsch (f)}\}$. Eine Aussageform ist eine Abbildung einer Menge in diese zweielementige Menge. Aus zwei Aussagen A und B lassen sich mittels so genannter Junktoren [1] neue Aussagen zusammenstellen.

Junktor	Bedeutung	Zeichen
Negation	nicht A	$\neg A$
Konjugation	A und B	$A \wedge B$
Disjunktion	A oder B	$A \vee B$
Implikation	wenn A, dann B	$A \Rightarrow B$
Äquivalenz	A genau dann, wenn B	$A \iff B$

De Morgansche Regeln

Für Aussagen A und B gilt

$$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \qquad (\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

[1] Junktor = Verbinder

Quantoren

Aus Aussageformen $A(x)$ kann man durch so genannte Quantoren Aussagen machen.

- Der "für alle" Quantor $\forall$:

$$(\forall x \in M : A(x)) = \begin{cases} wahr(w), & \text{falls } f \notin A(M) \\ falsch(f), & \text{falls } f \in A(M) \end{cases}$$

- Der "es existiert" Quantor $\exists$:

$$(\exists x \in M : A(x)) = \begin{cases} wahr(w), & \text{falls } w \in A(M) \\ falsch(f), & \text{falls } w \notin A(M) \end{cases}$$

Aus der Definition dieser Quantoren folgt:

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) = (\exists x \in M : \neg A(x)) \quad \text{und} \quad \neg(\exists x \in M : A(x)) = (\forall x \in M : \neg A(x))$$

Beweistechniken

Bei einer Implikation $A \Rightarrow B$ heißt A Voraussetzung und B Behauptung. Es gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Man unterscheidet folgende Beweistechniken:

1. Direkter Beweis: $A \Rightarrow B$ (modus ponens)
2. Indirekter Beweis: $\neg B \Rightarrow \neg A$ (modus tollens)
3. Widerspruchsbeweis: $\neg A$ ist falsch, also gilt A
4. vollständige Induktion
5. konstruktivisitischer Beweis (bei Existenzaussagen)

1.2 Mengen

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte. Sie kann eine endliche oder unendliche Zahl von Objekten beinhalten. Die Mächtigkeit $\#(M)$ einer endlichen Menge mit n Objekten ist definiert als die Anzahl der beinhalteten Objekte $\#(M) = n$ und für unendliche Mengen formal gesetzt unendlich $\#(M) = \infty$.

Teilmenge

Eine Menge M' ist eine Teilmenge von M ($M' \subset M$) wenn

$$x \in M' \Rightarrow x \in M.$$

Eine Menge M' heißt echte Teilmenge von M ($M' \supsetneq M$), wenn

$$M' \subset M \text{ und } \exists x \in M \text{ mit } x \notin M'.$$

geordnetes n-Tupel

$(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in M_i$ für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ heißt geordnetes n-Tupel. Für diese gilt

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n.$$

Mengenoperationen

- Vereinigung[2]

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cup \cdots \cup M_n := \{x : x \in M_i \text{ für mindestens ein i } \in \{1, \ldots, n\}\}$$

- Durchschnitt [3]

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cap \cdots \cap M_n := \{x : x \in M_i \text{ für alle i } \in \{1, \ldots, n\}\}$$

- Differenz

$$M \setminus N := \{x \in M : x \notin N\}$$

- direktes Produkt von Mengen

$$M_1 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in M_i \text{ für } i \in (1, \ldots, n)\}$$

Sind alle $M_i = M$ die gleiche Menge, ist definiert

$$M^n = M \times \cdots \times M \text{ (n mal)}$$

1.3 Gruppen

Eine *Gruppe* ist eine Menge, auf der eine Abbildung definiert ist. Die Gruppe wird bezeichnet mit $(G, \cdot)$, wobei G die Menge bezeichnet und $\cdot : G \times G \to G$ die zwischen den Elementen der Menge definierte Abbildung, die auch innere Verknüpfung genannt wird. Eine Gruppe erfüllt folgende Gruppenaxiome:

G0 $a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G \quad \forall a, b \in G$

G1 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G$ (Assoziativität)

G2.1 $\exists e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in G$ (neutrales Element)

G2.2 $\exists e \in G : \forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (inverses Element)

Die Gruppen, in denen gilt

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$$

heißen abelsche Gruppen oder kommutative[4] Gruppen. Erfüllen eine Menge H und die darauf definierte Verknüpfung $(H, \cdot)$ nur G0 und G1, so heißt $(H, \cdot)$ Halbgruppe.

[2]Eselsbrücke für das Vereinigungssymbol: Topf, in dem alle Mengen zusammen gemischt werden.
[3]Eselsbrücke für das Durchschnittssymbol: Plätzchenform, mit der man wie aus Plätzchenteig Mengen aussticht.
[4]kommutieren = vertauschen

Untergruppe

Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $G' \subset G$ eine Teilmenge, dann heißt $(G', \cdot)$ Untergruppe von $(G, \cdot)$, wenn

UG0 G' nicht leer ist, $G' \neq \emptyset$.

UG1 $a, b \in G' \Rightarrow a \cdot b \in G'$

UG2 $a \in G' \Rightarrow a^{-1} \in G'$

Rechenregeln für Gruppen

Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, so gilt $\forall a, b, x, y \in G$:

1. $(a^{-1})^{-1} = a, \qquad (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
2. $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y, \qquad x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y$
3. $a \cdot x = b$ eindeutig lösbar durch $x = a^{-1} \cdot b$,
   $y \cdot a = b$ eindeutig lösbar durch $y = b \cdot a^{-1}$

Verknüpfungstafel

Für endliche Mengen kann man die Wirkung einer inneren Verknüpfung auf der Menge mit Hilfe einer Verknüpfungstafel darstellen.
Beispiel: $(\{-1, 1\}, \cdot)$

·	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Die Verknüpfungstafel einer endlichen Menge mit einer assoziativen inneren Verknüpfung ist genau dann eine Gruppentafel, wenn in jeder Zeile und jeder Spalte der Tafel jedes Element der Menge höchstens einmal vorkommt.

Gruppenhomomorphismen

Seien $(G, \cdot)$ und $(G', \times)$ Gruppen und $\phi : G \to G'$ eine Abbildung. ϕ heißt *Homomorphismus von Gruppen*, wenn

$$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \times \phi(b) \quad \forall a, b \in G$$

1.4 Körper

Eine Menge K mit den Abbildungen $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ heißt Körper, wenn die Körperaxiome erfüllt sind:

K1 $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0 und inversen Element $-a$.

K2 $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 1 und inversen Element a^{-1}.

K3 $\forall a, b, c \in K$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Eine Menge K mit den Abbildungen $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ heißt *Ring*, falls $(K, +)$ eine abelsche Gruppe und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Halbgruppe ist. Besitzt die Halbgruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ zusätzlich ein neutrales Element, spricht man von einem *Ring mit Eins*. Ist stattdessen $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine nicht abelsche Gruppe, so spricht man von einem *Schiefkörper*.

<table>
<tr><td rowspan="4">Komm. Gr. +</td><td>Ass.</td><td>$(a+b)+c=a+(b+c)$</td><td rowspan="6">Ring</td><td rowspan="7">kommutativer Ring</td><td rowspan="8">kommutativer Ring mit 1</td><td rowspan="9">Körper</td></tr>
<tr><td>Komm.</td><td>$a+b=b+a$</td></tr>
<tr><td>Neutr.</td><td>$\exists\, 0 : 0+a=a+0=a$</td></tr>
<tr><td>Inv.</td><td>$\exists -a : a+(-a)=0$</td></tr>
<tr><td></td><td>Distr.</td><td>$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Komm. Gr. $\cdot$</td><td>Ass.</td><td>$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$</td></tr>
<tr><td>Komm.</td><td>$a\cdot b=b\cdot a$</td></tr>
<tr><td>Neutr.</td><td>$\exists 1 : 1\cdot a=a\cdot 1=a$</td></tr>
<tr><td>Inv.</td><td>$\exists\, a^{-1} : a\cdot a^{-1}=1$</td></tr>
</table>

1.5 Vektorräume

Ein Vektorraum $(V, +, \cdot)$ über einem Körper K besteht aus einer Menge V und zwei darauf definierten Abbildungen

$$+ : V \times V \to V \quad (v, w) \mapsto v + w$$

$$\cdot : K \times V \to V \quad (\lambda, w) \mapsto \lambda \cdot v,$$

wobei $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$. Damit von einem Vektorraum gesprochen werden kann, müssen die Vektorraumaxiome erfüllt sein:

V1 $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit Nullelement $\vec{0}$ und inversem Element $-v$.

V2 $\forall \lambda, \mu \in K$ und $\forall v, w \in V$:

(a) $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

(b) $1 \cdot v = v$

(c) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$

(d) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$

Untervektorräume

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Die Teilmenge $W \subset V$ heißt Untervektorraum, wenn

UV1 $W \neq \emptyset$

UV2 $v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$ (Abgeschlossenheit bzgl. Addition)

UV3 $v \in W, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot v \in W$ (Abgeschlossenheit bzgl. Multiplikation mit Skalaren)

Ein Untervektorraum ist selbst wieder ein Vektorraum. Sind $W_1, \ldots, W_n \subset V$ Untervektorräume, so ist auch $W := \bigcap_{i=1,\ldots,n} W_i \subset V$ ein Untervektorraum.

Rechenregeln für Vektoren

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum und $v \in V$, $\lambda \in K$. Es gilt:

1. $0 \cdot v = \vec{0}$
2. $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$
3. $\lambda \cdot v \Rightarrow \lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$
4. $(-1) \cdot v = -v$

Linearkombination und aufgespannter Raum

Eine Vektor $v \in V$ heißt *Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_n$, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt, sodass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Als *aufgespannten Raum* bezeichnet man die Menge aller Linearkombinationen

$$\mathrm{Span}_K(v_1, \ldots, v_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}.$$

$\mathrm{Span}_K(v_1, \ldots, v_n) \subset V$ ist ein Untervektorraum. Er ist der kleinste Untervektorraum, der alle $\{v_1, \ldots, v_n\}$ enthält.

Lineare Unabhängigkeit

Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren aus einem K-Vektorraum heißt *linear unabhängig*, wenn

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0.$$

Ein Vektor heißt *linear abhängig*, falls er nicht linear unabhängig ist. Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ aus einem K-Vektorraum ist genau dann linear unabhängig, wenn jedes $v \in \mathrm{Span}_K(v_1, \ldots, v_n)$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

besitzt. Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ aus einem K-Vektorraum ist genau dann linear abhängig, wenn mindestens einer der Vektoren eine Linearkombination der anderen ist. Der Nullvektor ist linear abhängig. 1-Tupel aus Vektoren außer dem Nullvektor sind linear unabhängig.

1.6 Basis und Dimension

Sei V ein K-Vektorraum. Ein n-Tupel $B = (v_1, \ldots, v_n)$ heißt eine endliche Basis von V über K, wenn es die Basisaxiome erfüllt:

B1 $\mathrm{Span}_K(v_1, \ldots, v_n) = V$

B2 $(v_1 \ldots, v_n)$ sind linear unabhängig.

Äquivalent zu B1 und B2 ist sowohl die Aussage

B Jedes $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \text{ mit } \lambda_i, \ldots, \lambda_n \in K$$

als auch

B' Die Abbildung

$$K^n \to V, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

ist bijektiv.

Je zwei endliche Basen eines Vektorraums haben gleiche Länge. Die kanonische Basis ist definiert als

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Als endliches Erzeugendensystem von V bezeichnet man das n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$, wenn $\mathrm{Span}_K(v_1, \ldots, v_n) = V$. Ein Erzeugendensystem $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis eines Vektorraums V, wenn $\mathrm{Span}_K(v_1, \ldots, v_n) = V$ und mit Dimension $n = \mathrm{dim} V$. Eine Basis lässt sich als minimales Erzeugendensystem charakterisieren. Folgende zwei Definitionen sind ebenfalls äquivalent zu den oben genannten:

B1 $\mathrm{Span}_K(v_1, \ldots, v_n) = V$

B2' Das Erzeugendensystem $(v_1, \ldots, v_n)$ ist unverkürzbar, d.h. ($\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ kein Erzeugendensystem mehr.

sowie

B1' $(v_1, \ldots, v_n)$ ist unverlängerbar linear unabhängig, d.h. $\forall v \in V$ ist $(v_1, \ldots, v_n, v))$ linear abhängig.

B2 $(v_1 \ldots, v_n)$ sind linear unabhängig.

Die Dimension eines endlich erzeugten Vektorraums ist definiert über die Länge der Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ als $\dim V = n$. Ist V nicht endlich erzeugt, setzt man $\dim V = \infty$.
Die Dimension eines Untervektorraums $W \subset V$ von einem endlich erzeugten K-Vektorraum V ist immer kleiner als die von V, $\dim W \le \dim V$. Ist $\dim W = \dim V$, so ist $V = W$.

Basis-Auswahlsatz

Sei V ein K-Vektorraum mit $V = \mathrm{Span}_K(v_1, \ldots, v_n)$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $0 < m \le n$ und $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$, sodass $B := (v_{i1}, \ldots, v_{im})$ eine Basis von V ist.

Basis-Austauschsatz

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$, sowie $(w_1, \ldots, w_m)$ ein linear unabhängiges System. Dann muss $m \le n$ und man kann $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$ finden, sodass man in der Basis $v_1, \ldots, v_m$ durch $w_1, \ldots, w_m$ ersetzen kann:

$$(w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n) \quad \text{für } i_1 = 1, \ldots, i_m = m.$$

Rezepte zur Basisbestimmung

- Gegeben ist ein endliches Erzeugendensystem E eines Vektorraums V. Um eine Basis $B \subset E$ zu bestimmen, entfernen wir so lange Vektoren aus dem Erzeugendensystem, bis ein linear unabhängiges Erzeugendensystem (also eine Basis) verbleibt.

- Gegeben ist eine linear unabhängige Teilmenge E eines endlich erzeugten Vektorraums V. Um eine Basis $B \supset E$ zu bestimmen, fügen wir der linear unabhängigen Menge E so lange weitere, zu den Vektoren aus E jeweils linear unabhängige Element aus V hinzu, bis ein linear unabhängiges Erzeugendensystem entsteht.

- Ob ein n-Tupel von Vektoren linear unabhängig ist, prüfen wir anhand der Definition linearer Unabhängigkeit (hier am Beispiel für $n = 3$):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0,$$

  wobei wir die Komponenten von v_i bezeichnen mit $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$ und $i \in \{1, 2, 3\}$. Ist dieses lineare, homogene Gleichungssystem mit nichttrivialer Lösung lösbar, so sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Affiner Unterraum

Sei V ein K-Vektorraum, dann heißt $L \subset V$ affiner Unterraum, wenn es einen Untervektorraum $L_0 \subset V$ und ein $v \in V$ gibt, sodass

$$L = v + L_0 = \{v + u : u \in L_0\}$$

Die Dimension eines affinen Unterraums ist eindeutig bestimmt und definiert als $\dim L := \dim L_0$. Die leere Menge $\emptyset$ ist ein affiner Unterraum.

AUFGABEN

1.1 Gegeben sei die Menge der symmetrischen 2×2-Matrizen

$$S_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

a) Zeigen Sie: $(S_2, +)$ ist eine kommutative Gruppe

b) Zeigen Sie: $(S_2, +, \cdot)$ mit der komponentenweise definierten Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot b & \lambda \cdot c \end{pmatrix}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche Dimension besitzt dieser?

1.2 Beweisen Sie folgende Aussagen: Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, so gilt $\forall a, b, x, y \in G$:

1. $(a^{-1})^{-1} = a \qquad (a \cdot b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
2. $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y \qquad x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y$
3. $a \cdot x = b$ eindeutig lösbar durch $x = a^{-1} \cdot b$ $y \cdot a = b$ eindeutig lösbar durch $y = b \cdot a^{-1}$

1.3 Beweisen Sie folgende Aussagen für eine (nicht notwendigerweise abelsche) Gruppe $(G, \circ)$:

a) Für jedes neutrale Element $e \in G$ gilt $a \circ e = e \circ a, \forall a \in G$, d.h. jedes linksneutrale Element e ist auch rechtsneutral. Daher spricht man auch einfach von einem neutralen Element.

b) Aus $a^{-1} \circ a = e$ folgt jeweils auch $a \circ a^{-1} = e$, d.h. jedes linksinverse Element a^{-1} ist auch rechtsinvers. Deshalb spricht man auch einfach von einem inversen Element.

c) Es gibt genau ein neutrales Element $e \in G$. Bereits aus $x \circ a = a$ oder $a \circ x = a$ für ein $a \in G$ folgt $x = e$.

d) Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element $a^{-1} \in G$.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst b), dann a), c) und d).

1.4 Gegeben sind ein Untervektorraum U eines K-Vektorraums V und Elemente $u, w \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

1. Sind u und w nicht in U, so ist auch $u + w$ nicht in U.
2. Sind u und w nicht in U, so ist $u + w$ in U.
3. Ist u in U, nicht aber w, so ist $u + w$ nicht in U.

1.5 Geben Sie zu folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ an, ob sie Untervektorräume sind und begründen Sie dies:

a)
$$U_1 := \{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | v_1 + v_2 = 2\}$$

b)
$$U_2 := \{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | v_1 + v_2 = v_3\}$$

c)
$$U_3 := \{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | v_1 \cdot v_2 = v_3\}$$

d)
$$U_4 := \{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | v_1 = v_2 \text{ oder } v_1 = v_3\}$$

1.6 Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$U := \{u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n | u_1 + \ldots u_n = 0\}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet und bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U.

1.7 Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ [5] sind Untervektorräume? Begründen Sie Ihre Aussagen.

a) $U_1 := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f(1) = 0\}$

b) $U_2 := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f(0) = 1\}$

c) $U_3 := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f$ hat höchstens endlich viele Nullstellen$\}$

d) $U_4 := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} |$ für höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \neq 0\}$

e) $U_5 := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f$ ist monoton wachsend$\}$

1.8 Prüfen Sie, ob die Menge

$$B := \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$$

[5] $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bezeichnet die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

eine Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bildet.

1.9 Bestimmen Sie eine Basis des von der Menge

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

erzeugten Untervektorraums $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X) \subset \mathbb{R}^4$.

1.10 Gegeben seien folgende Polynome aus $V = \mathbb{R}[z]_3$ (dem Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ mit maximalem Grad 3:

$$\begin{aligned} p_1(z) &:= z^3 - 2z^2 + 4z + 1 \\ p_2(z) &:= 2z^3 - 3z^2 + 9z - 1 \\ p_3(z) &:= z^3 + 6z - 5 \\ p_4(z) &:= 2z^3 - 5z^2 + 7z + 5. \end{aligned}$$

Es sei $U := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(p_1(z), p_2(z), p_3(z), p_4(z))$.

a) Bestimmen Sie eine Basis B von U.

b) Zeigen Sie, dass $z^2 + z - 3 \in U$ und ermitteln Sie eine Basisdarstellung von $z^2 + z - 3$ bezüglich der Basis B aus a).