I Grundbegriffe – Übungsaufgaben Lösungsvorschläge

03.03.2014
Philipp Gadow
philipp.gadow@mytum...

Gruppen

Aufgabe 1 $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

a) zu zeigen: $(S_2, +)$ ist kommutative Gruppe

zeige: $(S_2, +)$ ist Gruppe

- G0: $a, b \in G \Rightarrow a+b \in G \quad \forall a,b \in G$

$a := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$

$a+b = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix}$ da $(a_1+a_2), (b_1+b_2), (c_1+c_2) \in \mathbb{R}$, ist auch $a+b \in S_2$.

- G1: $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in G$

$c := \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right)$

$= \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ b_1+b_2+b_3 & c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a_2+a_3 & b_2+b_3 \\ b_2+b_3 & c_2+c_3 \end{pmatrix} \right)$

mit dem im Körper $\mathbb{R}$ geltenden Assoziativgesetz

$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

- G2.1 $\exists\, e \in G: \quad a+e = e+a = a \quad \forall a \in G$

Sei $e := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Offenbar ist $e \in S_2$ (symmetrische Matrix)

Wir zeigen $a+e = e+a = a$ für $a := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $a,b,c \in \mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ b+0 & c+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

eig. nicht nötig, da neutrales Element links- und rechtsneutral ist →

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a & 0+b \\ 0+b & 0+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

mit dem im Körper $\mathbb{R}$ geltenden $0+a = a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

• G2.2 $\exists e \in G: \forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G: \ a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$

Sei $e := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und a^{-1} für ein $a = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

definiert als $a^{-1} := \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -c \end{pmatrix} \in G_2$ (symmetrisch)

Wir zeigen:

$$a + a^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b \\ b-b & c-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a^{-1} + a = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+a & -b+b \\ -b+b & -c+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da in Zahlenkörper $\mathbb{R}$ $\quad \forall a \in \mathbb{R} \ \exists -a \in \mathbb{R}: \ a - a = -a + a = 0$,
wobei 0 das neutrale Element der Addition ist.

Wir zeigen nun, dass die Verknüpfung '+' kommutativ ist

z.z. $\quad a + b = b + a \quad \forall a, b \in G$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \\ b_2 + b_1 & c_2 + c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

da in Zahlenkörper $\mathbb{R}$ für die Verknüpfung '+' $\quad a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt.

b) zu zeigen: $\quad (S_2, +, \cdot)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

V1 $\quad (S_2, +)$ ist eine kommutative Gruppe $\quad$ (bereits in a) gezeigt)

V2 $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $a, b \in S_2 \quad \left(a := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \ b := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}\right)$:

a) z.z.: $(\lambda \cdot \mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \, a)$

$$(\lambda \mu) \cdot a = \begin{pmatrix} (\lambda \cdot \mu) \cdot a_1 & (\lambda \cdot \mu) \cdot b_1 \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot b_1 & (\lambda \mu) \, c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda (\mu \cdot a_1) & \lambda \cdot (\mu \cdot b_1) \\ \lambda \cdot (\mu \cdot b_1) & \lambda \cdot (\mu \cdot c_1) \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot a) = \lambda \begin{pmatrix} \mu \, a_1 & \mu \, b_1 \\ \mu \, b_1 & \mu \, c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (\mu \, a_1) & \lambda \cdot (\mu \, b_1) \\ \lambda \cdot (\mu \, b_1) & \lambda \cdot (\mu \, c_1) \end{pmatrix}$$

$=$

mit $\quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

z.z.: $1\cdot a = a$

$$1\cdot\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & c_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot a_1 & 1\cdot b_1\\ 1\cdot b_1 & 1\cdot c_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & c_1\end{pmatrix}$$

da in $\mathbb{R}$ (Zahlenkörper) gilt $1\cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ mit 1 neutralen Element der Verknüpfung '$\cdot$'.

z.z.: $(\lambda+\mu)\cdot a = (\lambda\cdot a) + (\mu\cdot a)$

$$(\lambda+\mu)\cdot a = (\lambda+\mu)\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & c_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\lambda+\mu)\,a_1 & (\lambda+\mu)\,b_1\\ (\lambda+\mu)\,b_1 & (\lambda+\mu)\,c_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda a_1+\mu a_1 & \lambda b_1+\mu b_1\\ \lambda b_1+\mu b_1 & \lambda c_1+\mu c_1\end{pmatrix}$$

$$(\lambda\cdot a)+(\mu\cdot a) = \begin{pmatrix}\lambda a_1 & \lambda b_1\\ \lambda b_1 & \lambda c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu a_1 & \mu b_1\\ \mu b_1 & \mu c_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda a_1+\mu a_1 & \lambda b_1+\mu b_1\\ \lambda b_1+\mu b_1 & \lambda c_1+\mu c_1\end{pmatrix} \quad (*)$$

$=$

z.z.: $\lambda\cdot(a+b) = (\lambda\cdot a) + (\lambda\cdot b)$

$$\lambda\begin{pmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\ b_1+b_2 & c_1+c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\,(a_1+a_2) & \lambda\,(b_1+b_2)\\ \lambda\,(b_1+b_2) & \lambda\,(c_1+c_2)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda a_1+\lambda a_2 & \lambda b_1+\lambda b_2\\ \lambda b_1+\lambda b_2 & \lambda c_1+\lambda c_2\end{pmatrix}$$

$$(\lambda\cdot a) + (\lambda\cdot b) = \begin{pmatrix}\lambda a_1 & \lambda b_1\\ \lambda b_1 & \lambda c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda a_2 & \lambda b_2\\ \lambda b_2 & \lambda c_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda a_1+\lambda a_2 & \lambda b_1+\lambda b_2\\ \lambda b_1+\lambda b_2 & \lambda c_1+\lambda c_2\end{pmatrix} \quad (*)$$

$=$

(*) wobei die Eigenschaften des Zahlenkörpers $\mathbb{R}$

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$
$$c\cdot(a+b) = ca + cb$$

verwendet wurden.

Da $B = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von S_2 aus $n=3$ Elementen ist, ist $\dim(S_2,+,\cdot) = 3$.

Aufgabe 2

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

1.) zu zeigen: $(a^{-1})^{-1} = a$

Beweis: $(G, \cdot)$ Gruppe $\Rightarrow$ $a \in G$: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$; $a^{-1} \in G$: $a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = e$ $\Big\}$ $a^{-1} \cdot a = a^{-1} (a^{-1})^{-1}$

Aus der Eindeutigkeit des inversen Element a^{-1} folgt $a = (a^{-1})^{-1}$. ∎

zu zeigen: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

Beweis: $(a \cdot b)^{-1} \cdot (a \cdot b) = e$, da $(a \cdot b) \in G$.

Ist $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, dann ist auch $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$.

Also: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) \overset{\text{Assoziativität}}{=} b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot b \overset{\text{inverses Element}}{=} b^{-1} \cdot e \cdot b$

$\overset{\text{Assoziativität}}{=} b^{-1} \cdot (e \cdot b) \overset{\text{neutrales Element}}{=} b^{-1} \cdot b \overset{\text{inverses Element}}{=} e$ ∎

2.) z.z.: $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$ $\forall a, x, y \in G$

$x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y$

Beweis $a \cdot x = a \cdot y \quad | a^{-1} \cdot$ $\qquad$ $x \cdot a = y \cdot a \quad | \cdot a^{-1}$

$\Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot (a \cdot y)$ $\qquad$ $\Rightarrow (x \cdot a) \cdot a^{-1} = (y \cdot a) \cdot a^{-1}$

$\overset{\text{Assoziativität}}{\Leftrightarrow} (a^{-1} \cdot a) \cdot x = (a^{-1} \cdot a) \cdot y$ $\qquad$ $\overset{\text{Assoziativität}}{\Leftrightarrow} x \cdot (a \cdot a^{-1}) = y \cdot (a \cdot a^{-1})$

$\overset{\text{Inverses}}{\Leftrightarrow} e \cdot x = e \cdot y$ $\qquad$ $\overset{\text{Inverses}}{\Leftrightarrow} x \cdot e = y \cdot e$

$\overset{\text{Neutrales}}{\Leftrightarrow} x = y$ ∎ $\qquad$ $\overset{\text{Neutrales}}{\Leftrightarrow} x = y$ ∎

3.) z.z.: $a \cdot x = b$ eindeutig lösbar durch $x = a^{-1} \cdot b$

Beweis: $a \cdot (a^{-1} \cdot b) \overset{\text{Ass.}}{=} (a \cdot a^{-1}) \cdot b \overset{\text{Inv.}}{=} e \cdot b \overset{\text{Neut.}}{=} b$ ∎

z.z.: $y \cdot a = b$ eindeutig lösbar durch $y = b \cdot a^{-1}$

Beweis: $(b \cdot a^{-1}) \cdot a \overset{\text{Ass.}}{=} b \cdot (a^{-1} \cdot a) \overset{\text{Inv.}}{=} b \cdot e \overset{\text{Neut.}}{=} b$ ∎

Aufgabe 3

Zeigen Sie folgende Aussagen für eine (nicht notwendigerweise) abelsche Gruppe:

a) z.z.: neutrales Element $e \in G$: $a \circ e = e \circ a \quad \forall a \in G$

Beweis: Zu $a \in G$ wählen wir ein Linksinverses $a^{-1} \in G$: $\rightarrow a^{-1} \circ a = e$ (*)

$$a \circ e \overset{(*)}{=} a \circ (a^{-1} \circ a) \overset{Ass.}{=} (a \circ a^{-1}) \circ a \overset{b)}{=} e \circ a \quad ■$$

b) z.z.: $a^{-1} \circ a = e \Rightarrow a \circ a^{-1} = e$

Beweis: Sei $a^{-1} \in G$ Linksinverses zu $a \in G$, $\rightarrow a^{-1} \circ a = e$ (*)
Wir wählen ein zu a^{-1} Linksinverses $b \in G$, $\rightarrow b \circ a^{-1} = e$ (**)

Dann ist

$$\underline{a \circ a^{-1}} = (e \circ a) \circ a^{-1} \overset{(**)}{=} ((b \circ a^{-1}) \circ a) \circ a^{-1} = (b \circ (a^{-1} \circ a)) \circ a^{-1}$$
$$= (b \circ e) \circ a^{-1} = b \circ (e \circ a^{-1}) = b \circ a^{-1} = \underline{e} \quad ■$$

c) z.z.: Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien e, e' neutrale Elemente, also $a \circ e = e \circ a = a \quad \forall a \in G$
$a \circ e' = e' \circ a = a \quad \forall a \in G$ (***)

Dann ist $e \overset{(***)}{=} e' \circ e \overset{a)}{=} e'$.

d) z.z.: Das inverse Element ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien a^{-1} und b^{-1} Linksinverses zu a, also $a^{-1} \circ a = e$ (*)
$b^{-1} \circ a = e$ (****)

Dann ist

$$\underline{a^{-1}} \overset{\text{neutr.}}{=} e \circ a^{-1} \overset{(****)}{=} (b^{-1} \circ a) \circ a^{-1} \overset{Ass.}{=} b^{-1} \circ (a \circ a^{-1})$$
$$\overset{(*)}{=} b^{-1} \circ e \overset{\text{neutr. } a)}{=} \underline{b^{-1}} \quad ■$$

Vektorräume

Aufgabe 4

Welche Aussagen sind richtig?

1) $u, w \notin U \Rightarrow u+w \notin U$ falsch — z.B. $U=\{0\}$, $u=1, w=-1$, $u,w \notin U$ aber $u+w \in U$

2) $u, w \notin U \Rightarrow u+w \in U$ falsch — z.B. $U=\{0\}$, $u=1, w=2$, $u,w \notin U$, $u+w=3 \notin U$

3) $u \in U, w \notin U \Rightarrow u+w \notin U$ richtig

Aufgabe 5

Welche Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + v_2 = 2 \right\}$

ist kein Untervektorraum.

UV2: $v, w \in W \Rightarrow v+w \in W \quad \forall v,w \in W$

Aber: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$, $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$, aber $v+w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_1$.

b) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + v_2 = v_3 \right\}$

ist ein Untervektorraum

UV1 $W \neq \emptyset$ $\quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_2$, also ist U_2 nicht leer

UV2 $v, w \in W \Rightarrow v+w \in W \quad \forall v,w \in W$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1+v_2 \end{pmatrix} \in U_2, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_1+w_2 \end{pmatrix} \in U_2 \Rightarrow v+w = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_1+v_2+w_1+w_2 \end{pmatrix} \in U_2$$

da $v_1+v_2+w_1+w_2 = (v_1+w_1)+(v_2+w_2)$

UV3 $v \in W, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot v \in W \quad \forall v \in W$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1+v_2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda(v_1+v_2) \end{pmatrix} \in U_2,$$

da $\lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

da in Zahlenkörper $\mathbb{R}$

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

c) $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v_1 \cdot v_2 = v_3 \right\}$ ist kein Untervektorraum

UV2 $\quad v,w \in W \Rightarrow v+w \in W \quad \forall\, v,w \in W$

aber: $\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 \cdot v_2 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_1 \cdot w_2 \end{pmatrix}$; $\; v_1, v_2 \in U_3$

doch $\quad v+w = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_1 \cdot v_2 + w_1 \cdot w_2 \end{pmatrix} \notin U_3$,

da $\quad v_1 \cdot v_2 + w_1 \cdot w_2 \neq \underbrace{(v_1+w_1)\cdot(v_2+w_2)}_{v_1v_2 + v_1w_2 + w_1v_2 + w_1w_2}$

d) $U_4 := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v_1 = v_2 \text{ oder } v_1 = v_3 \right\}$ ist kein Untervektorraum.

UV2 $\quad v,w \in W \Rightarrow v+w \in W \qquad \forall\, v,w \in V$

aber: $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_4,\ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_4$

doch $\quad v+w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_4 \qquad$ (Gegenbeispiel)

Aufgabe 6

Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$U := \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; u_1 + \dots + u_n = 0 \right\}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet und bestimmen Sie Basis und Dimension von U

$\mathbb{R}^n$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der kanonischen Basis $\vec{e}_i$.

Wir zeigen, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.
U ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Da $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in U$,
ist U nicht leer, $U \neq \emptyset$ und UV1 ist erfüllt.

UV2: $\quad v,w \in W \Rightarrow v+w \in U \qquad \forall\, v,w \in U$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ -(v_1 + \dots + v_{n-1}) \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ -(w_1 + \dots + w_{n-1}) \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{array}{l} \text{da } u_1 + \dots + u_n = 0 \\ \Leftrightarrow u_n = -(u_1 + \dots + u_{n-1}) \end{array} \right]$$

$$v+w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} + w_{n-1} \\ -(v_1 + w_1 + \dots + v_{n-1} + w_{n-1}) \end{pmatrix} \in U$$

wegen der Eigenschaften des Zahlenkörpers $\mathbb{R}$
$(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + \dots = (v_1 + w_1 + v_2 + w_2 + \dots)$
(Assoziativität)

UV3: $v \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lambda \cdot v \in U$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ -(v_1+\ldots+v_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \text{dann ist} \quad \lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_{n-1} \\ -\lambda(v_1+\ldots+v_{n-1}) \end{pmatrix} \in U$$

da im Zahlenkörper $\mathbb{R}$ das Distributivgesetz gilt:

$$\lambda v_1 + \ldots + \lambda v_{n-1} = \lambda (v_1 + \ldots + v_{n-1}).$$

Somit ist gezeigt, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist und damit insbesondere ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Eine Basis von U ist

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und da diese endlich ist und $\# B = n-1$ Elemente enthält, ist

$$\dim U = n-1.$$

Aufgabe 7

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind Untervektorräume?

a) $U_1 := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0 \}$ ist ein Untervektorraum

UV1: $U_1 \neq \emptyset$, da für $f(x) = 0$ die Nullabbildung $f(1) = 0$ ist und somit $\in U_1$.

UV2: $f, g \in U_1 \Rightarrow f+g \in U_1$ $\quad f(1) = 0$, $g(1) = 0$ $\quad (f+g)(1) = (f(1) + g(1)) = (0+0) = 0$ ✓

UV3: $f \in U_1$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f \in U_1$ $\quad f(1) = 0$ $\quad \lambda \cdot f(1) = \lambda \cdot 0 = 0$ ✓

b) $U_2 := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 1 \}$ ist kein Untervektorraum

UV2: $f, g \in U_2 \Rightarrow f+g \in U_2$ $\quad$ aber für $f(0) = 1$ und $g(0) = 1$:
$(f+g)(0) = (f(0) + g(0)) = (1+1) = 2 \neq 1$
$\Rightarrow f+g \notin U_2$.

c) $U_3 := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f$ hat höchstens endlich viele Nullstellen $\}$

ist kein Untervektorraum.

UV2: $f, g \in U_3 \Rightarrow f+g \in U_3$
UV3: $f \in U_3$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot f \in U_3$

Gegenbeispiel 1: $f \in U_3$, $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \cdot f = 0$ hat unendlich viele Nullstellen (Überall auf $\mathbb{R}$)

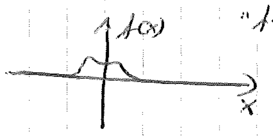
Gegenbeispiel 2: $f \in U_3$, $g \in U_3$ mit $g(x) = -f(x)$.

Dann sind $f \in U_3$, $g \in U_3$, aber $(f+g)(x) = (f(x) - f(x)) = 0$

ist die Nullabbildung mit unendlich vielen Nullstellen auf $\mathbb{R}$ und somit ist $f+g$ nicht in U_3.

d) $U_4 := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid$ für höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \neq 0 \}$

ist ein Untervektorraum.



UV1 $U_4 \neq \emptyset$

Die Nullabbildung $f(x) = 0$ ist für höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}$ (nämlich für keines) $f(x) \neq 0$.
Somit ist sie in U_4 enthalten und $U_4 \neq \emptyset$.

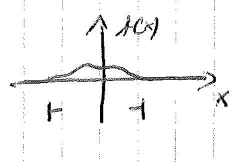
UV2 $f, g \in U_4 \Rightarrow f+g \in U_4$

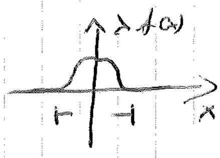
$f(x)$ ist für höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq 0$
$g(x)$ ist für höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \neq 0$

Dann ist auch $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ für höchstens endlich viele (nämlich maximal die Summe der $x \in \mathbb{R}$ von f und g) $(f+g)(x) \neq 0$.

UV3 $f \in U_4$, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot f \in U_4$

Ist $\lambda \in K$, $\lambda = 0$, ist beispielsweise $0 \cdot f = 0$ für höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}$ (nämlich keine) $f(x) \neq 0$.
Für $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ wird der Funktionswert nur skaliert, die Zahl der Nichtnullstellen ändert sich jedoch nicht. (da $0 \cdot \lambda = 0$).





e) $U_5 := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f$ ist monoton wachsend $\}$ ist kein Untervektorraum.

UV3 $f \in U_5$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot f \in U_5$ $\forall f \in U_5, \lambda \in \mathbb{R}$

Gegenbeispiel: $f \in U_5$ monoton wachsend, d.h.

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \text{für } x_2 > x_1 .$$

Aber für $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$ ist $0 \cdot f(x) = 0$

und $0 \cdot f(x_2) = 0 = 0 \cdot f(x_1)$ für $x_2 > x_1$,

somit ist $0 \cdot f(x)$ nicht monoton wachsend, sondern überall 0.

Basis und Dimension

Aufgabe 8

Prüfen Sie, ob die Menge

$B := \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

eine Basis des $\mathbb{R}^{2\times2}$ bildet.

Basis:

B1: $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^{2\times2}$

B2: (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unabhängig

zeige B1: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$ $\qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_4 - \lambda_3 & \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^{2\times2}$$

zeige B2 linear unabhängig $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_4 - \lambda_3 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (*)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3\ \lambda_4 = 0$

schreibe dazu die Matrizen als Darstellung bzgl. der Standardbasis

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ebenso $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lineare Unabhängigkeit zeigen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_4 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{vgl. mit } *)$$

Zeilenstufenform $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ voller Rang $\rightarrow$ linear unabhängig + Erzeugendensystem

$\dim \mathbb{R}^{2\times2} = 4 = \operatorname{rang} A$

$\Rightarrow$ ist eine Basis

Aufgabe 9

Bestimmen Sie eine Basis des von der Menge

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

erzeugten Untervektorraums $\text{Span}_{\mathbb{R}}(X) \subset \mathbb{R}^4$.

Prüfe Vektoren auf lineare Unabhängigkeit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{ZSF} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rang der Matrix $= 4 = \dim \mathbb{R}^4$

Wir können also, da der von X erzeugte Unterraum $\text{Span}_{\mathbb{R}}(X)$ der ganze $\mathbb{R}^4$ ist, einfach die Standardbasis / Kanonische Basis angeben

$B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ mit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10

Polynome aus $\mathbb{R}[z]_3$: Standardbasis $e_1 = z^3 \quad e_2 = z^2 \quad e_3 = z \quad e_4 = 1$

$p_1(z) := z^3 - 2z^2 + 4z + 1 \rightarrow p_1 = {}^t(1, -2, 4, 1)$

$p_2(z) := 2z^2 - 3z^2 + 9z - 1 \rightarrow p_2 = {}^t(2, -3, 9, -1)$

$p_3(z) := z^3 + 6z - 5 \rightarrow p_3 = {}^t(1, 0, 6, -5)$

$p_4(z) := 2z^3 - 5z^2 + 7z + 5 \rightarrow p_4 = {}^t(2, -5, 7, 5)$

Es sei $U := \text{Span}_{\mathbb{R}}(p_1(z), p_2(z), p_3(z), p_4(z))$

a) Bestimmen Sie eine Basis von U

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & z & z^2 & z^3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 9 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \\ 0 & 26 & -10 & 6 \\ 0 & -13 & 5 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'}$$

Es gilt $\text{Rang } A = \text{Rang } A' = 2$

$\Rightarrow \dim U = 2$

Eine Basis von U bilden p_1 und p_2, da diese wie in gezeigt, linear unabhängig sind.

Eine weitere Basis können wir angeben, wenn wir $p_5 := p_1 + p_2 = 3z^3 - 5z^2 + 13z$ definieren. Dann bilden p_1 und p_5 eine Basis. (...)

b) Man zeige, dass $z^2 + z - 3 \in U$ und ermittle eine Basisdarstellung von $z^2 + z - 3$ bezüglich der Basis aus a)

Wir nennen $p_6 := z^2 + z - 3$.

Wir verwenden die Basis $B = \{p_1, p_5\}$

p_6 befindet sich in U, wenn $\text{Spann}_{\mathbb{R}}(p_1, p_5, p_6) = \text{Spann}_{\mathbb{R}}(p_1, p_5)$, da dann p_6 als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar ist.

Wir stellen also ein LGS auf (wie zum Prüfen der Linearen Unabhängigkeit)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & z & z^2 & z^3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_5 \\ p_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \overset{Z_3 \to Z_3 + 3Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \end{pmatrix} \overset{Z_3 \to Z_3 - Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

der Zeilenraum dieser Matrix ist also derselbe wie für die Matrix A!

Also ist $p_6 \in U$.

Wir betrachten nun rückwärts die Zeilenumformungen, um die Basisdarstellung bezüglich $B = \{p_1, p_5\}$ abzulesen

$0 + p_5 - 3p_1 = p_6$ oder $\underbrace{z^2 + z - 3}_{p_6} = -3 \cdot (\underbrace{z^3 - 2z^2 + 4z + 1}_{p_1})$

$+ 1 \cdot (\underbrace{3z^3 - 5z^2 + 13z}_{p_5})$