Technische Universität München, Fakultät für Physik

Ferienkurs - Lineare Algebra

Philipp Gadow

03. März 2014

I Grundbegriffe

Gruppenaxiome

G0 $a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G \quad \forall a, b \in G$

G1 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G$ (Assoziativität)

G2.1 $\exists e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in G$ (neutrales Element)

G2.2 $\exists e \in G : \forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (inverses Element)

Untergruppentest

G0 G' ist nicht leer, $G' \neq \emptyset$.

G1 $a, b \in G' \Rightarrow a \cdot b \in G'$

G2 $a \in G' \Rightarrow a^{-1} \in G'$

Vektorraumaxiome

V1 $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit Nullelement $\vec{0}$ und inversem Element $-v$.

V2 $\forall \lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V$:

a) $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

b) $1 \cdot v = v$

c) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$

d) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$

Untervektorraumtest

UV1 $W \neq \emptyset$

UV2 $v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$ (Abgeschlossenheit bzgl. Addition)

UV3 $v \in W, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot v \in W$ (Abgeschlossenheit bzgl. Multiplikation mit Skalaren)

Lineare Unabhängigkeit

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

Basis

B1 $\mathrm{Span}_K(v_1, \dots, v_n) = V$

B2 $(v_1 \dots, v_n)$ sind linear unabhängig.

Algebraische Strukturen

<table>
<tr><td rowspan="4">Komm. Gr. +</td><td>Ass.</td><td>$(a+b)+c = a+(b+c)$</td><td rowspan="6">Ring</td><td rowspan="7">kommutativer Ring</td><td rowspan="8">kommutativer Ring mit 1</td><td rowspan="9">Körper</td></tr>
<tr><td>Komm.</td><td>$a+b = b+a$</td></tr>
<tr><td>Neutr.</td><td>$\exists\, 0 : 0+a = a+0 = a$</td></tr>
<tr><td>Inv.</td><td>$\exists -a : a+(-a) = 0$</td></tr>
<tr><td></td><td>Distr.</td><td>$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Komm. Gr. ·</td><td>Ass.</td><td>$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$</td></tr>
<tr><td>Komm.</td><td>$a \cdot b = b \cdot a$</td></tr>
<tr><td>Neutr.</td><td>$\exists 1 : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$</td></tr>
<tr><td>Inv.</td><td>$\exists\, a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$</td></tr>
</table>

Aufgaben

Gruppen

Aufgabe 1

Gegeben sei die Menge der symmetrischen 2×2-Matrizen

$$S_2 = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

a) Zeigen Sie: $(S_2, +)$ ist eine kommutative Gruppe

b) Zeigen Sie: $(S_2, +, \cdot)$ mit der komponentenweise definierten Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot b & \lambda \cdot c \end{pmatrix}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche Dimension besitzt dieser?

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgende Aussagen: Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, so gilt $\forall a, b, x, y \in G$:

1. $(a^{-1})^{-1} = a \qquad (a \cdot b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
2. $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y \qquad x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y$
3. $a \cdot x = b$ eindeutig lösbar durch $x = a^{-1} \cdot b$
   $y \cdot a = b$ eindeutig lösbar durch $y = b \cdot a^{-1}$

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgende Aussagen für eine (nicht notwendigerweise abelsche) Gruppe $(G, \circ)$:

a) Für jedes neutrale Element $e \in G$ gilt $a \circ e = e \circ a$, $\forall a \in G$, d.h. jedes linksneutrale Element e ist auch rechtsneutral. Daher spricht man auch einfach von einem neutralen Element.

b) Aus $a^{-1} \circ a = e$ folgt jeweils auch $a \circ a^{-1} = e$, d.h. jedes linksinverse Element a^{-1} ist auch rechtsinvers. Deshalb spricht man auch einfach von einem inversen Element.

c) Es gibt genau ein neutrales Element $e \in G$. Bereits aus $x \circ a = a$ oder $a \circ x = a$ für ein $a \in G$ folgt $x = e$.

d) Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element $a^{-1} \in G$.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst b), dann a), c) und d).

Vektorräume

Aufgabe 4

Gegeben sind ein Untervektorraum U eines K-Vektorraums V und Elemente $u, w \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

1. Sind u und w nicht in U, so ist auch $u + w$ nicht in U.
2. Sind u und w nicht in U, so ist $u + w$ in U.
3. Ist u in U, nicht aber w, so ist $u + w$ nicht in U.

Aufgabe 5

Geben Sie zu folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ an, ob sie Untervektorräume sind und begründen Sie dies:

a)
$$U_1 := \{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | v_1 + v_2 = 2\}$$

b)
$$U_2 := \{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | v_1 + v_2 = v_3\}$$

c)
$$U_3 := \{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | v_1 \cdot v_2 = v_3\}$$

d)
$$U_4 := \{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | v_1 = v_2 \text{ oder } v_1 = v_3\}$$

Aufgabe 6

Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$U := \{u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n | u_1 + \cdots + u_n = 0\}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet und bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U.

Aufgabe 7

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ [1] sind Untervektorräume? Begründen Sie Ihre Aussagen.

a) $U_1 := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f(1) = 0\}$

b) $U_2 := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f(0) = 1\}$

c) $U_3 := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f \text{ hat höchstens endlich viele Nullstellen}\}$

d) $U_4 := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | \text{ für höchstens endlich viele } x \in \mathbb{R} \text{ ist } f(x) \neq 0\}$

e) $U_5 := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f \text{ ist monoton wachsend}\}$

Basis und Dimension

Aufgabe 8

Prüfen Sie, ob die Menge

$$B := \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bildet.

Aufgabe 9

Bestimmen Sie eine Basis des von der Menge

$$X = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

erzeugten Untervektorraums $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X) \subset \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 10

Gegeben seien folgende Polynome aus $V = \mathbb{R}[z]_3$ (dem Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ mit maximalem Grad 3):

$$p_1(z) := z^3 - 2z^2 + 4z + 1 \qquad p_2(z) := 2z^3 - 3z^2 + 9z - 1$$
$$p_3(z) := z^3 + 6z - 5 \qquad p_4(z) := 2z^3 - 5z^2 + 7z + 5.$$

Es sei $U := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(p_1(z), p_2(z), p_3(z), p_4(z))$.

a) Bestimmen Sie eine Basis B von U.

b) Zeigen Sie, dass $z^2 + z - 3 \in U$ und ermitteln Sie eine Basisdarstellung von $z^2 + z - 3$ bezüglich der Basis B aus a).

[1] $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bezeichnet die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.