Ferienkurs Quantenmechanik - Probeklausur

Sommersemester 2013

Daniel Rosenblüh und Florian Häse
Fakultät für Physik
Technische Universität München

13. September 2013

Probeklausur

Aufgabe 1 [$\sim$ 15 min]

Beantworten Sie stichpunktartig folgende kurze Fragen

(i) *Warum kann die Schrödingergleichung keine relativistische Dynamik beschreiben?*

(ii) *Zeigen Sie*

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

(iii) *Leiten Sie die stationäre Schrödingergleichung aus der allgemeinen Schrödingergleichung her!*

(iv) *Zeigen Sie, dass für den einen dreidimensionalen quantenmechanischen Drehimpuls jede Drehimpulskomponente mit dem Quadrat des Drehimpulses kommutiert!*

(v) *Welche Werte können beim Wasserstoffatom die Quantenzahlen l und m bei gegebenem n annehmen?*

(vi) *Beweisen Sie: Wenn A nicht explizit zeitabhängig ist und $[H, A] = 0$ ist, dann ist auch $\langle A \rangle$ zeitunabhängig.*

(vii) *Gegeben sei ein Operator A mit $[A, L_x] = [A, L_y] = 0$. Berechne $[A, L_z]$.*

Aufgabe 2 [$\sim$ 10 min]

(i) In einem dreidimensionalen Hilbertraum sind folgende Zustände gegeben:

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle.$$

Dabei sind $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ die orthonormierten Basiszustände.

- *Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle\alpha|\beta\rangle$ und $\langle\beta|\alpha\rangle$ und zeigen Sie, dass $\langle\alpha|\beta\rangle^* = \langle\beta|\alpha\rangle$ gilt.*
- *Finden Sie alle Matrixelemente des Operators $A = |\alpha\rangle\langle\beta|$ und geben Sie die Matrixdarstellung von A an.*
- *Ist der Operator A hermitesch? (Begründung)*

(ii) Ein Teilchen mit dem Spin $S = \frac{1}{2}$ befindet sich in dem Spinzustand

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \textit{(In der z-Basis)}$$

- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei Messungen der z-Komponente des Teilchenspins die Werte $+\frac{1}{2}\hbar$ bzw. $-\frac{1}{2}\hbar$ bekommt?*
- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei Messungen der x-Komponente des Teilchenspins die Werte $+\frac{1}{2}\hbar$ bzw. $-\frac{1}{2}\hbar$ bekommt?*

Aufgabe 3 [$\sim$ 25 min]
Ein Teilchen mit $E < 0$ (gebundener Zustand) befinde sich in folgendem Potential

$$V(q) = \begin{cases} \infty & \text{für } q \leq 0 \quad (I) \\ -V_0 & \text{für } 0 < q < q_0 \quad (II) \\ 0 & \text{für } q_0 \leq q \quad (III) \end{cases}$$

(i) Geben Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung in drei Bereichen (I), (II) und (III) an!

(ii) Welche Bedingungen muss die Lösung bei $q = 0$, $q = q_0$ und $q \to \infty$ erfüllen?

(iii) Berechnen Sie die Energieeigenwerte!

(iv) Welche Bedingung muss das Potential, bzw. V_0 und q erfüllen, damit mindestens ein gebundener Zustand existiert?

Aufgabe 4 [$\sim$ 10 min]
Ein starrer Rotator mit Trägeitsmoment I wird durch den Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{1}{2I} L^2$$

beshcrieben. L^2 ist das Betragsquadrat des Drehimpulsoperators.

(i) Welche Werte kann die Energie des Systems annehmen und wie ist der Entartungsgrad der Energieeigenwerte?

(ii) Der Rotator besitze nun ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$. In einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ führt das zu einem Wechselwirkungsterm

$$H_1 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos(\theta).$$

H_1 soll als Störung behandelt werden. Berechnen Sie die erste nichtverschwindende Korrektur für die Grundzustandsenergie des Rotators.
Tipp: Es gilt für die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$:
$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$.

Aufgabe 5 [$\sim$ 30 min]
Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich frei in einer Dimension auf einem Kreis mit Umfang L bewegen kann, beispielsweise eine Kugel auf einem Ring.

(i) Zeigen Sie, dass stationäre Zustände als

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x/L}$$

geschrieben werden können, mit $-L/2 < x < L/2$ und $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und die erlaubten Energien dazu

$$E_n = \frac{2}{m} \left(\frac{n\pi\hbar}{L} \right)^2$$

sinid. Beachten Sie, dass mit Ausnahme des Grundzustandes alle Energiezustände doppelt entartet sind.

(ii) Nun führen wir eine Störung ein mit

$$H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

wobei wir fordern, dass $a \ll L$. Dadurch wird an die Position $x = 0$ eine kleine Grube im Potential eingefügt. Berechnen Sie die Energiekorrektur in erster Ordnung $E_n^{(1)}$

(iii) Was sind "gute" Linearkombinationen von Ψ_n und Ψ_{-n} für dieses Problem?