Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben

Sommersemester 2013

Daniel Rosenblüh und Florian Häse
Fakultät für Physik
Technische Universität München

12. September 2013

Wechselwirkung geladener Teilchen mit elektromagnetischen Feldern

Aufgabe 1 (**)
Der Hamiltonoperator für ein (positiv) geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld ist

$$H_{elm} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 - e\Phi$$

Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung $\partial_t(\Psi^*\Psi) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ *gilt, wenn der Stromdichtevektor* $\vec{j}$ *gleich*

$$\vec{j} = \frac{1}{2m}\left\{i\hbar(\Psi\vec{\nabla}\Psi^* - \Psi^*\vec{\nabla}\Psi) - 2e\vec{A}\Psi^*\Psi\right\}$$

ist. Beweisen Sie weiterhin, dass $\vec{j}$ *eichinvariant ist.*

Aufgabe 2 (**)
Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m *und Ladung* $-e$ *in einem homogenen Magentfeld* $\vec{B} = (0, 0, \mathcal{B})$ *und einem dazu gekreuzten homogenen elektrischen Feld* $\vec{E} = (\mathcal{E}, 0, 0)$*. Bestimmen Sie das Spektrum der Eigenenergien* $E(p_z, n)$ *und die zugehörigen Eigenfunktionen* $\Psi(\vec{r})$*.*
Hinweis: *Eine geeignete Eichung des Vektorpotentials* $A_y(\vec{r})$ *führt auf einen verschobenen harmonischen Oszilator. Wählen Sie das Skalarpotential* $\Phi(x)$ *so, dass es beim Eerwartungswert* $x_0 = \langle x \rangle$ *der* x*-Koordinate verschwindet. Formen Sie die* x*-abhängigen Terme im Hamiltonoperator durch eine quadratische Ergänzung um. Zeigen Sie, dass der Mittelwert der Geschwindigkeit in* y*-Richtung* $v_y = (p_y + eA_y)/m$ *gleich* $\langle v_y \rangle = -\mathcal{E}/\mathcal{B}$ *ist!*

Aufgabe 3 (***)
Betrachten Sie das Wasserstoffatom in einem schwachen *homogenen Magnetfeld* $\vec{B} = (0, 0, B)$. *Bei Berücksichtigung des Elektonenspins lautet der zugehörige Hamiltonoperator*

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2 - \frac{\alpha\hbar c}{r} + \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

mit dem Bohrschen Magneton $\mu_B = e\hbar/2m$ *und den Pauli-Spinmatrizen* $\vec{\sigma}$. *Bestimmen Sie (zu linearer Ordnung in* B*) die Eigenenergien* $E(n, m_l, m_s)$. *Skizzieren Sie die Aufspaltung der Energieniveaus zu* $n = 1, 2, 3$ *und geben Sie den verbleibenden Entartungsgrad an!*

1 Störungstheorie

Aufgabe 4 (*)
Angenommen der Hamiltonoperator eines Systems ist abhängig von einem Parameter λ. *Die Eigenenergien und Eigenfunktionen von* $H(\lambda)$ *seien durch* $E_n(\lambda)$ *und* $\Psi_n(\lambda)$ *bezeichnet. Das* Feynman-Hellmann *Theorem lautet dann*

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \left\langle \Psi_n \middle| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \middle| \Psi_n \right\rangle$$

unter der Annahme, dass E_n *nicht degeneriert sind oder die* Ψ_n *die "guten" Eigenfunktionen sind.*

(i) Beweisen Sie das Feynman-Hellmann Theorem!

(ii) Wenden Sie dieses Theorem auf den eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator an. Bestimmen Sie so die Erwartungswerte $\langle V \rangle$ *und* $\langle T \rangle$ *sowie eine Relation zwischen diesen.Nutzen Sie dazu*

(a) $\lambda = \omega$

(b) $\lambda = \hbar$

(c) $\lambda = m$

Beziehen Sie Ihre Ergebnisse auf Aussagen des Virialsatzes über dieses System.

Aufgabe 5 (**)
Berechnen Sie zu erster Ordnung in λ *die Energieverschiebung im Grundzustand des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators, wenn das Störpotential* $H_1 = \lambda x^4$ *zum Hamiltonoperator* $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$ *hinzuaddiert wird. Berechnen Sie auch die Korrektur in zweiter Ordnung* $\delta E_0^{(2)} \propto \lambda^2$

Aufgabe 6 (***)
Zum Coulombpotential werde ein Korrekturterm proportional zu $1/r^2$ hinzuaddiert, d.h.

$$V(r) = -\frac{\alpha\hbar c}{r} + \frac{\hbar^2 g}{2mr^2}$$

mit $g > -1/4$. Die zufällige Entartung des Wasserstoffspektrums bzgl. l wird nun aufgehoben. Berechnen Sie das zugehörige Energiespektrum E_{nl} exakt und entwickeln Sie die Spektralformel bis zur Ordnung g. Vergleichen Sie den Term linear in g mit dem Erwartungswert des Störpotentials.

Hinweis: *Die Radialgleichung für $u(\rho)$ erfährt folgende Modifikation: $l(l+1) \to l(l+1) + g = l'(l'+1)$.*
Hinweis: *Es gilt $\langle r^{-2}\rangle = [a_B^2 n^3 (l+1/2)]^{-1}$*

Aufgabe 7 (***)
Betrachten Sie den zweidimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{m}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right)$$

Berechnen Sie die Energieverschiebung aufgrund eines Störpotentials $H_1 = \varepsilon m\omega^2 xy$ im Grundzustand und im (entarteten) ersten angeregten Zustand in erster Ordnung Störungstheorie. Interpretieren Sie ihr Resultat. Lösen Sie das Problem nun exakt, beispielsweise durch Diagonalisierung der quadratischen Form für das Gesamtpotential, und vergleichen Sie mit einer Berechnung der Grundzustandsverschiebung in zweiter Ordnung Störungstheorie.