Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben

Sommersemester 2013

Daniel Rosenblüh und Florian Häse
Fakultät für Physik
Technische Universität München

11. September 2013

Drehimpuls
und
Spin

Drehimpuls

Aufgabe 1 **(*)** *Beweise die Relationen*

$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z, \quad [L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm, \quad [L^2, L_\pm] = 0$$

mithilfe von den Vertauschungsrelationen für den Drehimpuls: $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$

Aufgabe 2 **(*)** *Wir bezeichnen die simultanen Eigenkets von* L^2 *und* L_z *mit* $|l, m\rangle$, $l \in \mathbb{N}$ *und* $-l \leq m \leq +l$. *Für die Auf- und Absteigeoperatoren des Drehimpulses* $L_\pm = L_x \pm iL_y$ *gilt*

$$L_\pm |l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\, |l, m \pm 1\rangle$$

Drücke L_x *und* L_y *durch* $L_\pm$ *aus und zeige die Relationen*

$$\langle l, m|L_xL_y + L_yL_x|l, m\rangle = 0$$

$$\langle l, m|L_x^2 - L_y^2|l, m\rangle = 0$$

Aufgabe 3 **(*)** *Der Hamiltonoperator eines starren Rotators in einem Magnetfeld ist gegeben durch*

$$H = \frac{L^2}{2\Theta} + \gamma \vec{L} \cdot \vec{B}.$$

Dabei ist $\vec{L}$ *und* $\vec{B}$ *das angelegte Magnetfeld.* Θ *(das Trägheitsmoment) und* γ *(der gyromagnetische Faktor) sind Konstanten. Das Magnetfeld ist konstant in z-Richtung:* $\vec{B} = B\vec{e}_z$.
Wie lauten Energieeigenzustände des Systems? Berechne die Energieeigenwerte.

Probleme in 3 Dimensionen

Aufgabe 4 **(*)** *Die normierten Wasserstoffeigenfunktionen für maximalen Bahndrehimpuls* $l = n - 1$ *sind von der Form:*

$$\Psi_{n,n-1,m}(\vec{r}) = \frac{u_{n,n-1}(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad u_{n,n-1}(r) = \sqrt{\frac{2}{n(2n)!a_B}} \left(\frac{2r}{na_B}\right)^n e^{-\frac{r}{na_B}}$$

mit $a_B = \frac{\hbar}{m_e \alpha c}$.

a) *Bestimme den Abstand* r_{max} *an dem die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte* $P(r) = |u_{n,n-1}(r)|^2$ *maximal wird und vergleiche* r_max *mit dem Mittelwert* $\langle r \rangle$.

b) *Berechne* $\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}$. *Wie hängt die relative Abweichung* $\frac{\Delta r}{\langle r \rangle}$ *von der Hauptquantenzahl n ab? Das Ergebnis verdeutlicht, dass für große n die Vorstellung einer Kreisbahn zulässig ist.*

Tipp: $\int_0^\infty dx\, x^q e^{-x} = q!$.

Aufgabe 5 **(**)** *Behandle den dreidimensionalen harmonischen Oszillator in Kugelkoordinaten: Der Hamiltonoperator lautet*

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + \frac{M}{2}\omega^2 r^2.$$

a) *Reduziere die stationäre Schrödingergleichung auf eine Radialgleichung mit dem üblichen Ansatz* $\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$. *Vereinfache sie durch die Substitution mit den dimensionslosen Größen* $y = r\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}$ *und* $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$.

b) *Zeige das das asymptotische Verhalten durch den Ansatz* $u(y) = y^{l+1} e^{-y^2/2} v(y^2)$ *berücksichtigt wird und bestimme die verbleibende Differentialgleichung für* $v(y^2)$

c) *Schreibe die DGL aus b) um, in eine DGL für* $v(\rho)$ *mit der Variablen* $\rho = y^2$.

d) *Setze eine Potenzreihe für* $v(\rho)$ *an. Die Abbruchbedingung liefert das Energiespektrum* $E_{nl} = \hbar\omega(2n + l + \frac{3}{2})$ *mit Quantenzahlen* n, l.

Spin

Aufgabe 6 **(*)** *Zeige für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und die Paulimatrizen $\vec{\sigma}$ die Regel:*

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Aufgabe 7 **(**)** *Wir betrachten den Spin eines ELektrons im magnetischen Feld $\vec{B}$. Der Hamiltonoperator lautet*

$$H = -\left(\frac{e}{m_e c}\right) \vec{S} \cdot \vec{B}$$

Wir wählen ein konstantes Magnetfeld in z-Richtung. Der Hamiltonoperator ist also einfach

$$H = \omega S_z \quad \textit{mit} \quad \omega = \frac{|e|B}{m_e c}.$$

a) *Was sind die Energieeigenwerte und Eigenzustände des Systems?*

b) *Zum Zeitpunktpunkt $t = 0$ befindet sich das System in dem Zustand*

$$|\alpha; t = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle$$

(dem $|S_x; +\rangle$ Eigenzustand der S_x-Komponente). Benutze die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha; t\rangle = H |\alpha; t\rangle$$

um $|\alpha; t\rangle$ zu bestimmen.

c) *Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron zum Zeitpunkt t wieder im Zustand $|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle$ befindet. Wie groß ist also $|\langle S_x; +|\alpha; t\rangle|^2$?*

Aufgabe 8 **(**)** *Zeige, dass*

$$|\vec{S} \cdot \hat{n}; +\rangle \equiv \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\alpha}|-\rangle$$

ein Eigenket von dem Operator

$$\vec{S} \cdot \hat{n}$$

ist. Die Winkel α und β sind aus dem Bild ablesbar: