Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben

Sommersemester 2013

Daniel Rosenblüh und Florian Häse
Fakultät für Physik
Technische Universität München

6. September 2013

Schrödingergleichung und Potentialprobleme

1 Zeitentwicklung und Schrödingergleichung

Aufgabe 1 (*)
Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*(x,t)\Psi_2(x,t)\,dx = 0$$

für zwei beliebige normalisierbare Lösungen der Schrödingergleichung $\Psi_1(x,t)$ *und* $\Psi_2(x,t)$*!*

Aufgabe 2 (**)
Zeigen Sie, dass für ein beliebiges eindimensionales Potential $V(x)$ *eine normierbare Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung nur genau dann gefunden werden kann, falls die Energie* E *des Zustandes größer als das Minimum des Potentials ist.*

Aufgabe 3 (***)
Zeigen Sie, dass quantenmechanische Bindungszustände in einem eindimensionalen Potential $V(x)$ *stets nicht-entartet sid. Nehmen Sie an, dass zwei Wellenfunktionen* $\Psi_{1,2}(x)$ *dieselbe Schrödingergleichung*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

lösen.

2 Potentialprobleme

Aufgabe 4 (**)
Berechnen Sie die Bindungsenergien und normierten Wellenfunktionen für ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m, das von einem eindimensionalen δ-Potential

$$V(x) = -\lambda\delta(x) \qquad \lambda > 0$$

angezogen wird. Leiten Sie zuerst aus der zeitunabhängigen Schrödingergleichung die Sprungbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion am Ursprung her

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\Psi'(\varepsilon) - \Psi'(-\varepsilon)\right] = \lambda\Psi(0)$$

Wie viele Bindungszustände mit $E < 0$ gibt es? Berechnen Sie für den Bindungszustand die Orts- und Impulsunschärfen Δx und Δp und üperprüfen Sie die Heisenberg'sche Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$

Aufgabe 5 (**)
Betrachten Sie das Stufen Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für } x \leq 0 \\ V_0 & \textit{fürx} > 0 \end{cases}$$

(i) *Berechnen Sie den Reflektionskoeffizienten R im Fall $E < V_0$ und diskutieren Sie das Ergebnis.*

(ii) *Berechnen Sie den Reflektionskoeffizienten R im Fall $E > V_0/$*

(iii) *Für ein derartiges Potential, das im Unendlichen nicht verschwindet, ist der Transmissionskoeffizient nicht einfach $|F|^2/|A|^2$ (A ist hierbei die Einfallsamplitude und F die transmittierte Amplitude), da sich die transmittierte Welle mit einer anderen Geschwindigkeit fortbewegt. Zeigen Sie, dass*

$$T = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}}\frac{|F|^2}{|A|^2}$$

im Fall $E > V_0$.
Hinweis: *Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsstrom j.*

(iv) *Berechnen Sie nun den Transmissionskoeffizienten explizit für den Fall $E > V_0$ und schlussfolgern Sie, dass $T + R = 1$*

Aufgabe 6 (**)
Ein Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf hat die anfängliche Wellenfunktion

$$\Psi(x,0) = A\sin^3(\pi x/a) \qquad (0 \leq x \leq a)$$

Bestimmen Sie A, finden Sie $\Psi(x,t)$ und berechnen Sie $\langle x\rangle$ als eine Funktion der Zeit. Was ist der Erwartungswert der Energie?
Hinweis: *Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des unendlich hohen Potentialtopfs sind*

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Aufgabe 7 (***)
Ein Teilchen befindet sich im Grundzustand eines harmonischen Oszillators mit der Frequenz ω, wobei sich plötzlich die Federkonstante vervierfacht, so dass $\omega' = 2\omega$. Während dieses unendlich schnellen Vorganges ändert sich die Wellenfunktion des Teilchen nicht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Energiemessung den Wert $\hbar\omega/2$ ($\hbar\omega$) zu erhalten?

Aufgabe 8 (*)
In dieser Aufgabe soll die kalte Emission von Elektronen aus einem Metall untersucht werden. Betrachten Sie dazu ein (halbunendliches) Stück Metall. Die Bindung der Elektronen im Metall kann durch ein Stufenpotential

$$V(x<0) = -W \qquad V(x>0) = 0$$

mit $W > 0$ der Austrittsarbeit beschrieben werden. Durch Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes E (in negativer x-Richtung) können die Elektronen das Metall über den quantenmechanischen Tunneleffekt verlassen. Zeichnen Sie das Gesamtpotential und berechnen Sie die zugehörige Tunnelwahrscheinlichkeit (näherungsweise) als Funktion der elektrischen Feldstärk.
Hinweis: *Die Tunnelwahrscheinlichkeit für ein Teilchen der Energie E berechnet sich aus*

$$T(E) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} dx\,\sqrt{2mV(x) - E}\right)$$

Aufgabe 9 (*)
Zeigen Sie: Wenn Ψ_ν Eigenfunktion von $n = a^\dagger a$ zum Eigenwert ν ist, so ist $a^\dagger\Psi_\nu$ Eigenfunktion von n mit Eigenwert $\nu + 1$.