Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben

Sommersemester 2013

Daniel Rosenblüh und Florian Häse
Fakultät für Physik
Technische Universität München

9. September 2013

Grundlagen und Formalismus

Aufgabe 1 **(*)** *Betrachte die Wellenfunktion*

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t},$$

wobei $A, \lambda, \omega > 0$

a) Normiere Ψ

b) Was ist der Erwartungswert von x *und* x^2

c) Bestimme die Standardabweichung von x*. Wie sieht der Graph von* $|\Psi|^2$ *als Funktion von* x *aus? Markiere die Punkte* $(\langle x\rangle + \Delta x)$ *und* $(\langle x\rangle - \Delta x)$ *und berechne die Wahrscheinlichkeit das Teilchen außerhalb dieses Bereichs zu finden*

Lösung:

a)

$$1 = \int |\Psi|^2 dx = 2|A|^2 \int_0^\infty e^{-2\lambda x} = 2|A|^2 \left(\frac{e^{-2\lambda x}}{-2\lambda}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{|A|^2}{\lambda} \Longrightarrow \boxed{A = \sqrt{\lambda}}$$

b)

$$\langle x\rangle = \int x|\Psi|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-2\lambda|x|}dx \underset{ungeraderIntegrand}{=} 0$$

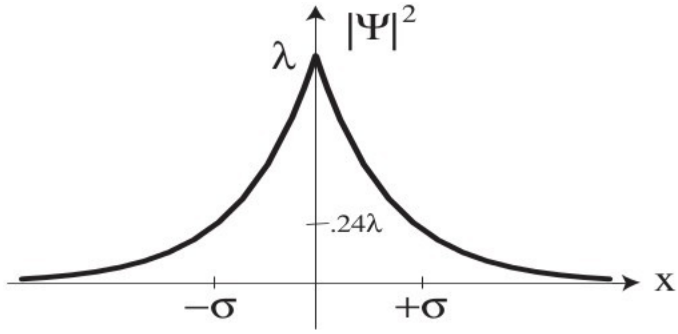
$$\langle x^2\rangle = 2|A|^2 \int_0^\infty x^2 e^{-2\lambda x}dx = 2\lambda\left[\frac{2}{(2\lambda)^3}\right] = \boxed{\frac{1}{2\lambda^2}.}$$

c)

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2\lambda^2} \Longrightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}}$$

$$|\Psi(\pm\Delta x)|^2 = |A|^2 e^{-2\lambda\Delta x} = \lambda e^{-2\lambda/\sqrt{2}\lambda} = \lambda e^{-\sqrt{2}} \approx 0.2431\lambda$$

Graph:



Wahrscheinlichkeit das Teilchen außerhalb $\pm\Delta x$ anzutreffen:

$$2|A|^2 \int_{\Delta x}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 2|A|^2 \int_{\Delta}^{\infty} e^{-2\lambda x} dx = 2\lambda \left(\frac{e^{-2\lambda x}}{-2\lambda} \right) \Bigg|_{\Delta x}^{\infty} = e^{-2\lambda\Delta x} = \boxed{e^{-\sqrt{2}} = 0.2431.}$$

Aufgabe 2 **(*)** *Wir haben einen unendlichdimensionalen Hilbertraum mit einem abzählbaren Orthonormalsystem* $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, ...\}$, *dh* $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$. *Ein* kohärenter Zustand *ist definiert als*

$$|\Psi_\alpha\rangle \equiv C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

mit einer komplexen Zahl α.
Außerdem definieren wir uns den Absteigeoperator a *über*

$$a\,|n\rangle \equiv \sqrt{n}\,|n-1\rangle \;\; \forall n \geq 1 \quad \textit{und} \quad a\,|0\rangle \equiv 0$$

a) Bestimme C*, sodass* $|\Psi_\alpha\rangle$ *normiert ist.*

b) Zeige, dass $|\Psi_\alpha\rangle$ *Eigenzustand von* a *ist und berechne den Eigenwert.*

c) Sind kohärente Zustände $|\Psi_\alpha\rangle$ *und* $|\Psi_\beta\rangle$ *für* $\alpha \neq \beta$ *orthogonal?*

Lösung:

a)

$$1 = \langle \Psi_\alpha | \Psi_\alpha \rangle = |C|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \underbrace{\langle n|m\rangle}_{=\delta_{nm}} = |C|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} = |C|^2 e^{|\alpha|^2} \Longrightarrow \boxed{C = e^{-|\alpha|^2/2}}$$

b)

$$a\,|\Psi_\alpha\rangle = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}a\underbrace{|n\rangle}_{\sqrt{n}|n-1\rangle} = C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \alpha C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \alpha\,|\Psi_\alpha\rangle$$

c) Nein,

$$\langle\Psi_\alpha|\Psi_\beta\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{-|\beta|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} = e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2}e^{\alpha^*\beta} \neq 0$$

Aufgabe 3 **(*)** *Wir benutzen einen zweidimensionalen komplexen Hilbertraum (dh. den $\mathbb{C}^2$) um ein System mit zwei Zuständen zu beschreiben. Unsere Orthonormalbasis bezeichnen wir mit $|+\rangle, |-\rangle$. Außerdem definieren wir uns die Operatoren*

$$S_x \equiv \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$
$$S_y \equiv \frac{i\hbar}{2}(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$
$$S_z \equiv \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$$

a) *Zeige, dass $|+\rangle$ und $|-\rangle$ Eigenzustände von S_z sind*

b) *Zeige, dass $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$*

c) *Wie lautet die Unschärferelation für die beiden Operatoren S_x und S_y für ein System im Zustand $|+\rangle$.*

Lösung:

a)

$$S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\underbrace{\langle+|+\rangle}_{=1} - |-\rangle\underbrace{\langle-|+\rangle}_{=0}) = \frac{\hbar}{2}|+\rangle$$
$$S_z|-\rangle = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\underbrace{\langle+|-\rangle}_{=0} - |-\rangle\underbrace{\langle-|-\rangle}_{=1}) = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle$$

b) In Matrixdarstellung

$$[S_x, S_y] = S_xS_y - S_yS_x = \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right] =$$

$$\frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\right] = i\hbar\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = i\hbar S_z$$

c) Die Unschärferelation lautet

$$\Delta S_x \Delta S_y \geq \frac{1}{2} |\left\langle [S_x, S_y] \right\rangle_{|+\rangle}| \underset{b)}{=} \frac{\hbar}{2} |\left\langle +|S_z|+ \right\rangle| = \frac{\hbar^2}{4} \left\langle +\right| \Big[|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -| \Big] |+\rangle = \frac{\hbar^2}{4}.$$

S_x und S_y können also nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmt werden.

Aufgabe 4 (**)

a) Zeige, dass Eigenwerte von hermiteschen Operatoren reell sind.

b) Zeige, dass Eigenwerte von antihermiteschen Operatoren imaginär sind.

c) Zeige, dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten von hermiteschen Operatoren orthogonal sind.

Lösung:

a) Sei a ein Eigenwert von dem hermiteschen Operator A. Wir bezeichnen einen zugehörigen normierten Eigenvektor mit Ψ. Jetzt gilt

$$a = a \langle \Psi, \Psi \rangle = \langle \Psi, a\Psi \rangle = \langle \Psi, A\Psi \rangle = \langle \Psi, A^\dagger \Psi \rangle = \langle A\Psi, \Psi \rangle = \langle a\Psi, \Psi \rangle = a^* \langle \Psi, \Psi \rangle = a^*$$

Also ist a reell.

b) Analog: Sei b ein Eigenwert von dem antihermiteschen Operator B. Wir bezeichnen einen zugehörigen normierten Eigenvektor mit Ψ. Jetzt gilt

$$b = b \langle \Psi, \Psi \rangle = \langle \Psi, B\Psi \rangle = -\langle \Psi, B^\dagger \Psi \rangle = -\langle B\Psi, \Psi \rangle = -\langle b\Psi, \Psi \rangle = -b^* \langle \Psi, \Psi \rangle = -b^*$$

Also ist b rein imaginär.

c) Seien λ, μ verschiedene Eigenwerte von dem hermiteschen Operator A. Zugehörige Eigenvektoren seien respektive v, u. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu) \langle v, u \rangle &= \lambda \langle v, u \rangle - \mu \langle v, u \rangle = \langle \lambda v, u \rangle - \langle v, \mu u \rangle \\ &= \langle Av, u \rangle - \langle v, Au \rangle = \langle v, A^\dagger u \rangle - \langle v, Au \rangle = \langle v, (A^\dagger - A)u \rangle = 0\end{aligned}$$

Da aber $\lambda - \mu \neq 0$ gilt, muss $\langle \lambda | \mu \rangle = 0$ gelten.

Aufgabe 5 (*)

a) Zeige $[p, x^n] = -i\hbar n x^{n-1}$

b) Zeige mit a), dass $[p, F(x)] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial x}$ *für alle* F *gilt, die als Potenzreihe ausgedrückt werden können.*

Lösung:

a) Beweis durch Induktion:

$n = 1$: Das ist die bekannte kanonische Vertauschungsrelation von Ort und Impuls.

$n - 1 \to n$: Nehmen wir an wir haben es für $n - 1$ bereits gezeigt, dann folgt wegen

$$[p, x^n] = [p, x \cdot x^{n-1}] = x \underbrace{[p, x^{n-1}]}_{=-i\hbar(n-1)x^{n-2} \text{ nach IV}} + \underbrace{[p, x]}_{=-i\hbar} x^{n-1} = x \cdot (-i\hbar(n-1)x^{n-2}) - i\hbar x^{n-1} =$$

$$= -i\hbar n x^{n-1}$$

dass es auch für n gilt. Damit ist unsere Induktion vollständig.

b) Sei $F(x) = \sum a_n x^n$. Dann ist

$$[p, F(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [p, x^n] \underset{a)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-i\hbar n x^{n-1}) = -i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial x}$$

Aufgabe 6 **(*)** *Berechne den Erwartungswert für p und p^2 einer ebenen Wellen die mit einem Gauss moduliert ist:*

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{d}} \exp\left(ikx - \frac{x^2}{2d^2}\right)$$

Lösung:

$$\langle p \rangle = \int dx\, \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) = \int dx\, \psi^*(x) \left[-i\hbar \left(ik - \frac{x}{d^2}\right)\right] \psi(x) =$$

$$= \hbar k \underbrace{\int dx\, \psi^*(x)\psi(x)}_{=1} + \frac{i\hbar}{d^2} \underbrace{\int dx\, \psi^*(x) x \psi(x)}_{=\langle x \rangle = 0 \text{ (VL)}} = \hbar k$$

$$\langle p^2 \rangle = \int dx\, \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi(x) \underset{p \text{ hermitesch}}{=} \int dx \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\right]^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)$$

$$= \int dx \left[\underbrace{-i\hbar \left(ik - \frac{x}{d^2}\right)}_{=\hbar k + i\frac{x\hbar}{d^2}} \psi(x)\right]^* \left[-i\hbar \left(ik - \frac{x}{d^2}\right) \psi(x)\right]$$

$$= \int dx\, \psi^*(x) \left(\hbar k + i\frac{x\hbar}{d^2}\right)^* \left(\hbar k + i\frac{x\hbar}{d^2}\right) \psi(x) = \int dx\, \psi^*(x) \left(\hbar^2 k^2 + \frac{x^2\hbar^2}{d^4}\right) \psi(x)$$

$$= \hbar^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{d^4} \underbrace{\langle x^2 \rangle}_{=d^2/2 \text{ (VL)}} = \hbar^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{2d^2}$$

Aufgabe 7 **(*)** *Zeige für zwei hermitesche Operatoren A und B die Identität*

$$\langle i[B,A]\rangle_\Psi = 2\mathrm{Im}\,\langle A\Psi, B\Psi\rangle$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\langle i[B,A]\rangle_\Psi &= i\,\langle \Psi, BA\Psi\rangle - i\,\langle \Psi, AB\Psi\rangle \underset{A,B\ \text{hermitesch}}{=} i\,\langle B\Psi, A\Psi\rangle - i\,\langle A\Psi, B\Psi\rangle \\ &= i\,\langle A\Psi, B\Psi\rangle^* - i\,\langle A\Psi, B\Psi\rangle = -i\left[\underbrace{\langle A\Psi, B\Psi\rangle - \langle A\Psi, B\Psi\rangle^*}_{=2i\mathrm{Im}\,\langle A\Psi, B\Psi\rangle}\right] \\ &= 2\mathrm{Im}\,\langle A\Psi, B\Psi\rangle\end{aligned}$$

Aufgabe 8 **(**)** *Zeige, dass kommutierende Observablen einen gemeinsamen Satz von Eigenfunktionen haben, also simultan diagonalisierbar sind.*

Lösung:
Betrachte beliebige Observablen A und B für die gilt: $[A,B]=0$. Für A kennen wir einen Satz Eigenfunktionen Ψ_i zu den Eigenwerten a_i.

Zunächst der Fall ohne Entartung von A(dh alle Eigenwerte von A sind verschieden):

$$AB\Psi_i \underset{AB=BA}{=} BA\Psi_i = Ba_i\Psi = a_iB\Psi_i$$

$B\Psi_i$ ist also wieder eine Eigenfunktion zum Eigenwert a_i von A. Da keine Entartung vorliegt muss $B\Psi_i$ linear abhängig von Ψ_i sein, es existiert also eine Zahl b_i, sodass $B\Psi_i = b_i\Psi_i$. Somit sind Ψ_i auch Eigenfunktionen von B.

Falls Entartung vorliegt gilt das letzte Argument nicht. Wir können $B\Psi_i$ allerdings immer noch als Linearkombination von allen Eigenfunktionen zu a_i ausdrücken. B lässt den Unterraum der Eigenfunktionen zum Eigenwert a_i also invariant. Auf diesem Unterraum kann B als hermitescher Operator diagonalisiert werden. Wenn wir den Schritt für jeden entarteten Eigenwert wiederholen bekommen wir einen vollständigen Satz gemeinsamer Eigenfunktionen.

Aufgabe 9 **(**)** *Wir definieren das* Exponential *eines Operators A als*

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

a) Zeige $e^{A+B} = e^A e^B \quad$ *für* $\quad [A,B] = 0$

b) Zeige mit a), dass $e^{-A}e^A = e^A e^{-A} = 1$

c) Nun sei $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. *Berechne*

$$e^A B e^{-A}.$$

Benutz dafür die Taylorentwicklung der operatorwertigen Funktion

$$f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$$

d) Sei immer noch $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. *Benutz c) um zu zeigen, dass*

$$e^B e^A = e^A e^B e^{[B,A]}$$

Lösung:

a) Der Beweis läuft analog zum Fall für reelle Zahlen statt Operatoren:

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n \underset{AB=BA}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\frac{B^{n-k}}{(n-k)!}}_{\text{Cauchy Produkt}}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}\right) = e^A e^B$$

b) Einsetzen in a) liefert

$$e^{-A}e^A = e^{-A+A} = e^0 = 1 \quad \text{und} \quad e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = 1$$

c) Es gilt

$$f'(\lambda) \underset{\text{Produktregel}}{=} e^{\lambda A} A B e^{-\lambda A} + e^{\lambda A} B(-A) e^{-\lambda A} = e^{\lambda A}[A,B]e^{-\lambda A}$$
$$f''(\lambda) \underset{\text{Produktregel}}{=} e^{\lambda A} \underbrace{[A,[A,B]]}_{=0} e^{-\lambda A} = 0$$

Also sind alle höheren Ableitungen ebenfalls 0. Die Taylorreihe von $f(\lambda)$ bricht nach dem zweiten Glied ab. Sie lautet im Punkt Null

$$f(\lambda) = f(0) + \lambda f'(0) = B + \lambda[A,B].$$

Ausgewertet in $\lambda = 1$ erhalten wir also

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B].$$

d) Wir werten $f(\lambda)$ noch einmal im Punkt $\lambda = -1$ aus. Wir erhalten

$$e^{-A} B e^A = B - [A, B] = B + [B, A]$$

Bezeichne $S \equiv e^{-A}$, dann ist $S^{-1} = e^A$. Wir haben

$$SBS^{-1} = B + [B, A].$$

Auf beide Seiten wenden wir jetzt wieder das Exponential an. Dann haben wir

$$e^{SBS^{-1}} = Se^B S^{-1} = e^{-A} e^B e^A \quad \text{und} \quad e^{B+[B,A]} = e^B e^{[B,A]}$$

Also

$$e^{-A} e^B e^A = e^B e^{[B,A]} \quad \text{oder} \quad \boxed{e^B e^A = e^A e^B e^{[B,A]}}$$

Aufgabe 10 **(*)** *Betrachte einen Hilbertraum der von den Eigenkets* $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \ldots$ *von* A *aufgespannt wird. Die entsprechenden Eigenwerte lauten* $a_1, a_2, a_3, \ldots$. *Beweise, dass*

$$\prod_n (A - a_n)$$

der Nulloperator ist.

Lösung:
Wir sehen das alle Faktoren in dem Produkt miteinander kommutieren. Anwenden von

$$\prod_n (A - a_n)$$

auf einen beliebigen Eigenket $|k\rangle$ von A liefert 0 (wende zuerst den Faktor $A - a_k$ auf $|k\rangle$ an). Jeder Vektor $|x\rangle$ kann als Linearkombination $|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |n\rangle$ von Eigenkets dargestellt werden. Also wird auch $|x\rangle$ auf Null abgebildet.

Aufgabe 11 (*)

a) Die normierte Wellenfunktion von einem Teilchen im 1-dimensionalen Ortsraum lautet

$$\Psi(x) = \frac{\gamma}{2} e^{\gamma|x|}$$

Berechne die Wellenfunktion $\Phi(p)$ im Impulsraum.

b) Die normierte Wellenfunktion eines Teilchens im 1-dimensionalen Ortsraum lautet

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a}\theta(a - |x|)$$

Berechne die Wellenfunktion $\Phi(p)$ im Impulsraum.

c) Die normierte Wellenfunktion eines Teilchens im 1-dimensionalen Impulsraum lautet

$$\Phi(p) = \frac{b}{\pi}\frac{1}{p^2 + b^2}.$$

Berechne die Wellenfunktion im Ortsraum.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\Phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\gamma}{2}\int dx\, e^{-ipx/\hbar} e^{-\gamma|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\gamma}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{(\gamma - ip/\hbar)x} + \int_{0}^{\infty} dx\, e^{(-\gamma-ip/\hbar)x}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\gamma}{2}\left[\frac{1}{\gamma - ip/\hbar} - \frac{1}{-\gamma - ip/\hbar}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\gamma}{2}\left[\frac{\gamma + ip/\hbar + \gamma - ip/\hbar}{\gamma^2 + p^2/\hbar^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + p^2/\hbar^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 12 (*) *Eine Observable A besitzt die zwei normierten Eigenzustände ψ_1 und ψ_2, mit den Eigenwerten a_1 und a_2. Die Observable B besitzt die normierten Eigenzustände ϕ_1 und ϕ_2 mit den Eigenwerten b_1 und b_2. Für die Eigenzustände gilt*

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

a) Observable A wird gemessen und man erhält den Wert a_1. Was ist der Zustand des Systems direkt nach der Messung?

b) Im Anschluss wird B gemessen. Was sind die möglichen Ergebnisse und mit welcher Wahrscheinlickeit treten sie auf?

c) Direkt nach der Messung von B wird wieder A gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir wieder a_1?

Lösung:

a) Nach den Axiomen der QM befindet sich das System direkt nach der Messung im Eigenzustand vom zugehörigen Eigenwert, also in ψ_1.

b) Das System befindet sich im Zustand $\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5$. In dem Moment wo B gemessen wir kollabiert es in einen Eigenzustand von B. Die Wahrscheinlichkeit welchen Wert unsere Messung liefert ist genau das Betragsquadrat von dem Faktor des zugehörigen Eigenzustands in der Linearkombination. Die Wahrscheinlichkeit b_1 zu messen ist also $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ und die Wahrscheinlichkeit b_2 zu messen $\left(\frac{4}{5}\right)^2$.

c) Drücken wir die Eigenfunktionen von B in den Eigenfunktionen von A aus erhalten wir

$$\phi_1 = (3\psi_1 + 4\psi_2)/5, \quad \phi_2 = (4\psi_1 - 3\psi_2)/5.$$

Falls das System sich also in ϕ_1 befindet beträgt die Wahrscheinlichkeit a_1 zu messen $\left(\frac{3}{5}\right)^2$. Falls es sich in ϕ_2 befindet beträgt die Wahrscheinlichkeit a_1 zu messen $\left(\frac{4}{5}\right)^2$.

Aus b) wissen wir:

Das System befindet sich mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ im Zustand ϕ_1 und mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ in ϕ_2. Multiplizieren der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten liefert für die Gesamtwahrscheinlichkeit a_1 zu messen

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{337}{625}$$