Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben

Sommersemester 2013

Daniel Rosenblüh und Florian Häse
Fakultät für Physik
Technische Universität München

9. September 2013

Grundlagen und Formalismus

Aufgabe 1 **(*)** *Betrachte die Wellenfunktion*

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t},$$

wobei $A, \lambda, \omega > 0$

a) Normiere Ψ

b) Was ist der Erwartungswert von x *und* x^2

c) Bestimme die Standardabweichung von x*. Wie sieht der Graph von* $|\Psi|^2$ *als Funktion von* x *aus? Markiere die Punkte* $(\langle x\rangle + \Delta x)$ *und* $(\langle x\rangle - \Delta x)$ *und berechne die Wahrscheinlichkeit das Teilchen außerhalb dieses Bereichs zu finden*

Aufgabe 2 **(*)** *Wir haben einen unendlichdimensionalen Hilbertraum mit einem abzählbaren Orthonormalsystem* $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, ...\}$*, dh* $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$*. Ein* kohärenter Zustand *ist definiert als*

$$|\Psi_\alpha\rangle \equiv C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

mit einer komplexen Zahl α*.*
Außerdem definieren wir uns den Absteigeoperator a *über*

$$a|n\rangle \equiv \sqrt{n}\,|n-1\rangle \;\; \forall n \geq 1 \quad \textit{und} \quad a|0\rangle \equiv 0$$

a) Bestimme C*, sodass* $|\Psi_\alpha\rangle$ *normiert ist.*

b) Zeige, dass $|\Psi_\alpha\rangle$ *Eigenzustand von* a *ist und berechne den Eigenwert.*

c) Sind kohärente Zustände $|\Psi_\alpha\rangle$ *und* $|\Psi_\beta\rangle$ *für* $\alpha \neq \beta$ *orthogonal?*

Aufgabe 3 **(*)** *Wir benutzen einen zweidimensionalen komplexen Hilbertraum (dh. den* $\mathbb{C}^2$*) um ein System mit zwei Zuständen zu beschreiben. Unsere Orthonormalbasis bezeichnen wir mit* $|+\rangle, |-\rangle$*. Außerdem definieren wir uns die Operatoren*

$$S_x \equiv \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$
$$S_y \equiv \frac{i\hbar}{2}(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$
$$S_z \equiv \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$$

a) *Zeige, dass* $|+\rangle$ *und* $|-\rangle$ *Eigenzustände von* S_z *sind*

b) *Zeige, dass* $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$

c) *Wie lautet die Unschärferelation für die beiden Operatoren* S_x *und* S_y *für ein System im Zustand* $|+\rangle$.

Aufgabe 4 **(**)**

a) *Zeige, dass Eigenwerte von hermiteschen Operatoren reell sind.*

b) *Zeige, dass Eigenwerte von antihermiteschen Operatoren imaginär sind.*

c) *Zeige, dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten von hermiteschen Operatoren orthogonal sind.*

Aufgabe 5 **(*)**

a) *Zeige* $[p, x^n] = -i\hbar n x^{n-1}$

b) *Zeige mit a), dass* $[p, F(x)] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x}$ *für alle* F *gilt, die als Potenzreihe ausgedrückt werden können.*

Aufgabe 6 **(*)** *Berechne den Erwartungswert für p und* p^2 *einer ebenen Wellen die mit einem Gauss moduliert ist:*

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{d}} \exp\left(ikx - \frac{x^2}{2d^2}\right)$$

Aufgabe 7 **(*)** *Zeige für zwei hermitesche Operatoren* A *und* B *die Identität*

$$\langle i[B, A]\rangle_\Psi = 2\mathrm{Im}\,\langle A\Psi, B\Psi\rangle$$

Aufgabe 8 **(**)** *Zeige, dass kommutierende Observablen einen gemeinsamen Satz von Eigenfunktionen haben, also simultan diagonalisierbar sind.*

Aufgabe 9 **(**)** *Wir definieren das* Exponential *eines Operators A als*

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

a) *Zeige* $e^{A+B} = e^A e^B \quad$ *für* $\quad [A, B] = 0$

b) *Zeige mit a), dass* $e^{-A}e^A = e^A e^{-A} = 1$

c) *Nun sei* $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. *Berechne*

$$e^A B e^{-A}.$$

Benutz dafür die Taylorentwicklung der operatorwertigen Funktion

$$f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$$

d) *Sei immer noch* $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. *Benutz c) um zu zeigen, dass*

$$e^B e^A = e^A e^B e^{[B,A]}$$

Aufgabe 10 **(*)** *Betrachte einen Hilbertraum der von den Eigenkets* $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \ldots$ *von A aufgespannt wird. Die entsprechenden Eigenwerte lauten* $a_1, a_2, a_3, \ldots$. *Beweise, dass*

$$\prod_n (A - a_n)$$

der Nulloperator ist.

Aufgabe 11 **(*)**

a) *Die normierte Wellenfunktion von einem Teilchen im 1-dimensionalen Ortsraum lautet*

$$\Psi(x) = \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma|x|}$$

Berechne die Wellenfunktion $\Phi(p)$ *im Impulsraum.*

b) *Die normierte Wellenfunktion eines Teilchens im 1-dimensionalen Ortsraum lautet*

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a}\theta(a - |x|)$$

Berechne die Wellenfunktion $\Phi(p)$ *im Impulsraum.*

c) *Die normierte Wellenfunktion eines Teilchens im 1-dimensionalen Impulsraum lautet*

$$\Phi(p) = \frac{b}{\pi} \frac{1}{p^2 + b^2}.$$

Berechne die Wellenfunktion im Ortsraum.

Aufgabe 12 **(*)** *Eine Observable A besitzt die zwei normierten Eigenzustände ψ_1 und ψ_2, mit den Eigenwerten a_1 und a_2. Die Observable B besitzt die normierten Eigenzustände ϕ_1 und ϕ_2 mit den Eigenwerten b_1 und b_2. Für die Eigenzustände gilt*

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

a) *Observable A wird gemessen und man erhält den Wert a_1. Was ist der Zustand des Systems direkt nach der Messung?*

b) *Im Anschluss wird B gemessen. Was sind die möglichen Ergebnisse und mit welcher Wahrscheinlickeit treten sie auf?*

c) *Direkt nach der Messung von B wird wieder A gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir wieder a_1?*